

PROGRESIÓN DE DAÑO PULMONAR MEDIDO POR APROXIMACIONES VÍA DISTANCIA DE HAUSDORFF Y DIAGRAMAS DE VORONOI

**Memoria para optar al título profesional de
Ingeniero Civil Matemático**

Kathryn Shalom Barraza Araya

Profesor guía: Dr. Gerardo Honorato

Universidad de Valparaíso

Profesora co-guía: Dr. Soledad Torres

Universidad de Valparaíso

Profesor co-guía: Dr. Jaime Retamal

Pontificia Universidad Católica de Chile

INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA
FACULTAD DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD DE VALPARAÍSO,
31 DE MARZO 2025.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco

Resumen

La distancia de Hausdorff es una métrica que permite cuantificar la similitud entre dos conjuntos en un espacio métrico, midiendo la mayor distancia entre los puntos más cercanos de cada conjunto. Es particularmente útil para evaluar cambios en la forma y el tamaño de estructuras geométricas. Por otro lado, los diagramas de Voronoi son una partición del espacio en regiones asociadas a un conjunto de puntos generadores, se basan en la proximidad a los conjuntos, lo que permite modelar interacciones espaciales y relaciones de vecindad entre regiones.

Estos conceptos matemáticos se aplican al estudio de la transformación de los pulmones bajo distintas condiciones patológicas. El deterioro pulmonar puede manifestarse en diversas partes de su estructura y la distribución del daño es heterogénea. En este trabajo se analizan dos tipos de cambios en los alvéolos, ya que, constituyen una de las áreas donde es posible observar alteraciones morfológicas. Mediante la distancia de Hausdorff y los diagramas de Voronoi, es posible cuantificar y modelar estos cambios estructurales, proporcionando un marco matemático para el análisis del daño pulmonar. De esta manera, a través de herramientas matemáticas, se busca explicar fenómenos observables en el ámbito médico.

Abstract

The Hausdorff distance is a metric that quantifies the similarity between two sets in a metric space by measuring the greatest distance between their closest points. It is particularly useful for evaluating changes in the shape and size of geometric structures. On the other hand, Voronoi diagrams partition space into regions associated with a set of generating points, based on their proximity to the sets. This allows for modeling spatial interactions and neighborhood relationships between regions.

These mathematical concepts are applied to the study of lung transformation under different pathological conditions. Pulmonary deterioration can manifest in various parts of its structure, affecting both shape and distribution. This work analyzes two types of changes in the alveoli, as they represent one of the areas where morphological alterations can be observed. By using the Hausdorff distance and Voronoi diagrams, it is possible to quantify and model these structural changes, providing a mathematical framework for analyzing lung damage. In this way, mathematical tools are employed to explain phenomena observed in the medical field.

Agradecimientos

En primer lugar quiero dar gracias a Dios por haber tenido la oportunidad de estudiar esta carrera y haber conocido a tantas personas que fueron parte de este lindo y muchas veces difícil recorrido. Le doy gracias a mis padres que siempre me brindaron su apoyo y amor en cada etapa, mi mamá Graciela Araya que me facilitó siempre las cosas para poder enfocarme bien en mis estudios y me impulsó a dar lo mejor, quien me alentaba en cada fin de semestre, y mi papá, Jaime Barraza, quien me levantaba el ánimo, me cocinaba lo que me gustaba durante noches largas de estudio y estaba tan orgulloso de mí, sé que estaría feliz por mí en estos momentos. Las palabras no son suficientes para describir cuán agradecida estoy de ellos y de la bendición de que sean mis padres, los amo.

Gracias a mis profesores que fueron tan cercanos a mí, muchas veces la relación de profesor-estudiante se sentía más como una amistad. Por su preocupación en mis momentos difíciles y su felicidad cuando me iba bien, miles de gracias.

Agradezco a Gerardo Honorato, Soledad Torres y Jaime Retamal, que fueron mis profesores guías de este trabajo, quienes me dieron la oportunidad de abordar este problema interdisciplinar de matemática y fenómenos pulmonares, me han acompañado en esta parte final de mi carrera y siempre han tenido buena disposición para poder abordar el problema de la mejor manera. Gracias a Lisandro Fermín que fue un gran aporte en el principio del proyecto y atendió muchas de mis consultas. Agradezco también a Daniel Hurtado por proporcionar imágenes de alvéolos, las cuales fueron fundamentales para este estudio.

Estoy agradecida también de haber conocido a mis tres amigas de la universidad, con las que hemos podido estudiar juntas, disfrutar los logros de las otras y apoyarnos en los buenos y malos momentos. Las esperaré desde el otro lado ahora. Gracias a todos mis compañeros y amigos cercanos, con quienes ha sido muy grato poder compartir y acompañarnos en toda nuestra etapa universitaria.

Gracias a los proyectos Mathamsud 22-MATH-10 - Topological, combinatorial, and probabilistic aspects in dynamical systems. CIDI 16/2023 Centro de Investigación y Modelamiento de Fenómenos Aleatorios, Valparaíso CIMFAV. FONDECYT Regular Nro. 1230807 - Functional stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion: Numerical approximation and statistical models y FONDECYT Regular Nro. 1241897.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco

A mis padres.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco

Índice general

Resumen	3
Abstract	4
1. Introducción	11
2. Motivación	14
3. Objetivos	16
3.1. Objetivo general	16
3.2. Objetivos específicos	16
4. Estado del arte	18
4.1. Modelamiento matemático del daño alveolar	18
4.2. Modelamiento de colapso de alvéolos	19
4.3. Aplicación de la distancia de Hausdorff en la segmentación de imágenes médicas	20
4.4. Diagramas de Voronoi en el análisis de estructuras pulmonares	21
4.5. Integración de métodos matemáticos en el estudio del daño pulmonar	21
5. Distancia de Hausdorff	23
5.1. Definición	23
5.1.1. Ejemplo de distancia de Hausdorff entre el círculo unitario y disco cerrado	24
5.1.2. Distancia de Hausdorff y distancia euclideana entre conjuntos	25
5.1.3. Segmentación de imágenes médicas	26
5.2. Analogía morfológica de alvéolos	27
5.3. Análisis de cambio morfológico alveolar	27
5.3.1. Procedimiento para la medición de distancia de Hausdorff	28
5.3.2. Resultados de mediciones de distancia de Hausdorff a imágenes comparativas a alvéolos	29
5.4. Aplicaciones a imágenes de pulmones	32
5.4.1. Resultados de medición de distancia de Hausdorff a pulmones durante proceso de ventilación mecánica.	34
6. Diagramas de Voronoi	36
6.1. Definición	36
6.2. Metodología	37
6.3. Simulaciones de fusión de puntos en un diagrama de Voronoi	40
6.4. Probabilidad de coalescencia de puntos en diagramas de Voronoi	41

6.4.1. Algoritmo de probabilidad de coalescencia de puntos	41
6.4.2. Resultados de la simulación de fusión de puntos	44
6.4.3. Aplicación de algoritmo de coalescencia de puntos a sección alveolar	46
6.5. Observaciones	48
7. Trabajo futuro	49
7.1. Distancia de Hausdorff	49
7.2. Diagramas de Voronoi	50
8. Conclusiones	51
A. Anexo	53

Capítulo 1

Introducción

El sistema respiratorio es fundamental para la vida, ya que permite el intercambio de gases necesario para la oxigenación de los tejidos y la eliminación de dióxido de carbono, procesos esenciales para el metabolismo celular. Dentro de este sistema, los pulmones desempeñan un papel crítico, al ser los órganos responsables de la función vital de la respiración. Esto hace que el estudio del deterioro pulmonar sea de gran relevancia médica y científica.

Una de las estructuras más importantes dentro de los pulmones son los alvéolos, unidades funcionales donde se produce el intercambio gaseoso entre el aire inspirado y la sangre. Este proceso involucra la difusión de oxígeno hacia los capilares y la eliminación de dióxido de carbono, siendo fundamental para la homeostasis del organismo. La forma, el tamaño y la integridad estructural de los alvéolos son indicadores clave del estado de salud pulmonar y pueden reflejar alteraciones asociadas a diversas patologías respiratorias.

El deterioro pulmonar puede tener múltiples etiologías, incluyendo enfermedades crónicas como la enfermedad pulmonar obstructiva crónica (EPOC), fibrosis pulmonar, infecciones graves, procesos neoplásicos, envejecimiento natural y secuelas postquirúrgicas. Evaluar cómo estas condiciones afectan la morfología pulmonar, en particular la de los alvéolos, es esencial para comprender su impacto funcional y para desarrollar herramientas diagnósticas y terapéuticas más efectivas.

Existen dos conceptos matemáticos pertinentes para abordar este problema. En primer lugar, la distancia de Hausdorff, utilizada en segmentación de imágenes, es bastante usada en ámbitos médicos como los realizados por Karimi & Salcudean, 2019 [8]. Su precisión y capacidad para capturar detalles estructurales la convierten en una métrica idónea para analizar variaciones en la morfología de objetos.

La aplicabilidad de la distancia de Hausdorff radica en su capacidad para modelar fenómenos del mundo real mediante representaciones geométricas y conjuntos de puntos. Su formulación sobre espacios compactos garantiza que las mediciones obtenidas sean bien definidas y computacionalmente manejables, lo que refuerza su uso en el estudio de la morfología pulmonar y otros sistemas estructurados.

Su definición en términos de supremos e ínfimos la hace especialmente adecuada para analizar estructuras espaciales complejas, como las presentes en imágenes biomédicas. Además, dado que la distancia de Hausdorff está bien definida en el espacio de los subconjuntos compactos de un espacio métrico, su uso en la caracterización de estructuras pulmonares y sus configuraciones pueden modelarse como conjuntos compactos. Esto permite describir cuantitativamente cambios estructurales asociados a patologías pulmonares y evaluar similitudes entre configuraciones alveolares en distintos estados fisiológicos o patológicos.

En segundo lugar, están los diagramas de Voronoi, que proporcionan una partición del espacio basada

en la proximidad a un conjunto de puntos generadores, dividiendo el dominio en regiones donde cada punto pertenece a la celda asociada a su generador más cercano. Estos diagramas están presentes en distintos patrones de la naturaleza, se pueden observar en ejemplos tan sencillos como en el pelaje de una jirafa o en detalles microscópicos de una hoja de una planta.

Desde un punto de vista matemático, los diagramas de Voronoi permiten representar la influencia espacial de cada generador de un conjunto y constituyen una herramienta útil en el análisis de estructuras espaciales complejas. Dado que modelan relaciones de vecindad, resultan particularmente adecuados para estudiar configuraciones alveolares en imágenes médicas.

Se emplearon como una aproximación geométrica para la segmentación de imágenes de alvéolos, con el propósito de analizar el tamaño de estos y el mecanismo de destrucción de paredes alveolares que ocurre por consecuencia de algunas patologías. Además, para estudiar la distribución alveolar cuando se rompen sus paredes, se observó qué ocurre con el diagrama de Voronoi cuando los puntos generadores se fusionan, es decir, hacer análisis de cómo va cambiando la estructura del diagrama y cómo se va configurando su forma a medida que hay fusión de más puntos progresivamente, simulando la manera en que se redistribuyen los alvéolos cuando hay ruptura de sus paredes.

Ahora, la aplicación de estos conceptos es para describir los cambios morfológicos que ocurren dentro del pulmón. Un ejemplo de como una condición médica afecta los pulmones, en su forma, es la atelectasia, esta condición puede ocurrir por obstrucción de las vías respiratorias y provoca el colapso del pulmón o una parte de él, generando una deformación en los alvéolos. En su forma sana los alvéolos pueden tener una apariencia esférica e inflada (por los gases internos que contienen) y cuando ocurre esta deformación por atelectasia su apariencia se vuelve más rugosa y con pérdida de aire. Otro ejemplo de afección es la pérdida de elasticidad pulmonar que puede ser provocada por enfisema o por fibrosis pulmonar, en este caso también se ven cambios en la forma de los alvéolos, ya que, ante la pérdida de elasticidad las paredes alveolares tienen mayor tendencia a romperse durante el intercambio gaseoso y por las presiones que ocurren en el proceso de respiración.

Este trabajo se centra en el estudio de la distancia de Hausdorff y diagramas de Voronoi para modelar el nivel de daño que se puede observar mediante la apariencia de los alvéolos, ya que, se ha observado una relación entre el deterioro pulmonar y la forma de estos o directamente la estructura del pulmón en sí. Entonces, en primera instancia, se busca estudiar un modelo que mida el nivel de daño existente. El objetivo entonces es, que a través de aproximaciones de distancia de Hausdorff y diagramas de Voronoi, clasificar según las formas del pulmón y que esto entregue información de cuan deteriorado se encuentra.

De esta manera, la combinación del análisis mediante la distancia de Hausdorff y los diagramas de Voronoi permite modelar y cuantificar procesos observables en estructuras biológicas, en este caso, el daño pulmonar. Si bien cada método captura aspectos distintos de la transformación alveolar, su complementariedad proporciona un marco matemático riguroso para describir y evaluar el deterioro estructural del tejido pulmonar. Esto resalta cómo herramientas matemáticas pueden ser utilizadas para representar y analizar fenómenos del mundo real con precisión y formalidad.

Como se mencionaba, los alvéolos experimentan dos procesos principales asociados al deterioro y que describen cambios morfológicos:

- **Colapso alveolar y deformación:** En este proceso de colapso de alvéolos y pérdida de aireación pulmonar, los pliegues de las paredes alveolares tienden a plegarse, lo que reduce el volumen funcional del alvéolo. Este fenómeno se analiza utilizando la distancia de Hausdorff, ya que permite evaluar los cambios en la forma y estructura del alvéolo durante su colapso.
- **Quiebre de paredes alveolares y fusión de centros:** En este caso, las paredes que separan

los alvéolos se rompen, generando la apariencia de un alvéolo más grande debido a la fusión de espacios adyacentes. Para este fenómeno, se emplean diagramas de Voronoi para modelar las secciones alveolares y analizar la redistribución de los centros de masa, estudiando cómo la fusión de los alvéolos está relacionada con el quiebre de las paredes.

El análisis con diagramas de Voronoi permite aproximar como las paredes rotas afectan la geometría y disposición de los alvéolos vecinos, mientras que la distancia de Hausdorff se enfoca en la medición precisa de las deformaciones durante el colapso. Ambas herramientas ofrecen una visión complementaria del daño, proporcionando una evaluación más integral del deterioro pulmonar.

De este modo, este trabajo se estructura en dos partes. La primera parte se centra en el análisis mediante la distancia de Hausdorff, abordando el estudio del cambio morfológico que ocurre cuando los alvéolos experimentan colapso u otros procesos que afectan directamente su forma. La segunda parte está dedicada al uso de los diagramas de Voronoi, donde se analiza la relación entre el mecanismo de destrucción de paredes alveolares y la fusión de los centros de Voronoi.

Capítulo 2

Motivación

Los pulmones desempeñan un papel fundamental en el funcionamiento del organismo, ya que permiten el intercambio gaseoso necesario para la oxigenación tisular y la eliminación del dióxido de carbono. El sistema respiratorio opera mediante una serie de procesos fisiológicos y mecánicos altamente coordinados, que incluyen la ventilación, la difusión de gases y la perfusión pulmonar.

Cada estructura pulmonar cumple una función específica dentro de este sistema. En particular, los alvéolos, pequeñas unidades anatómicas en forma de sacos de aire, constituyen el sitio primario de intercambio gaseoso. A través de sus delgadas paredes se facilita la difusión de oxígeno hacia la sangre y la eliminación de dióxido de carbono, lo que resulta esencial para la función respiratoria.

Debido a causas respiratorias, cifras del Ministerio de Salud en 2016 señalan que una de cada diez personas fallece en Chile [12] [1] y a nivel mundial este tipo de enfermedades representan una carga significativa para los sistemas de salud; de hecho, Honduras tuvo la tasa de mortalidad más alta con 58.7 defunciones por 100000 habitantes por enfermedades respiratorias en 2019 [5]. Ese mismo año estuvo marcado por covid-19, que es una forma de síndrome de dificultad respiratoria aguda (SDRA).

Hay algunas patologías pulmonares que afectan directamente la estructura de los alvéolos. Por ejemplo, la enfermedad pulmonar obstructiva crónica (EPOC) que compromete la elasticidad pulmonar, lo que conlleva la destrucción de las paredes alveolares. Otra afección es la atelectasia, que provoca el colapso pulmonar, alterando la distribución espacial de los alvéolos. Cuando algunos de estos colapsan, los tejidos circundantes tienden a plegarse para ocupar el espacio dejado por la estructura colapsada. Ambas patologías generan alteraciones morfológicas que pueden ser identificadas mediante imágenes médicas.

En este trabajo se abordan específicamente estos dos fenómenos, el colapso alveolar (que puede ser causado por atelectasia u otra condición médica) y destrucción de las paredes alveolares (ocasionada por EPOC u otra enfermedad). Mediante distancia de Hausdorff y diagramas de Voronoi se busca modelar cuantificando, por aproximaciones, el daño causado por estos fenómenos.

Considerando estadísticas relacionadas a las afecciones mencionadas recientemente, se tiene que la EPOC es la cuarta causa de muerte a nivel mundial y, en 2021, fue responsable de 3,5 millones de fallecimientos, lo que equivale aproximadamente al 5 % de todas las defunciones globales [15].

Por otro lado, la atelectasia es una de las complicaciones pulmonares más frecuentes en el período perioperatorio. Estudios basados en imágenes médicas han evidenciado que, entre 5 y 10 minutos después de la inducción anestésica, hasta el 90 % de los pacientes presentan atelectasias en las zonas pulmonares más dependientes [18]. El SDRA es una condición frecuente, posee el 10 % de las admisiones en unidades de cuidados intensivos (UCI), y un 24 % de los pacientes que reciben ventilación mecánica en la UCI.

En cuanto a la mortalidad producida por el SDRA se considera alta, desde un 35 % a 46 % de casos, siendo directamente proporcional a la gravedad del síndrome [4]. El colapso alveolar es su principal característica asociándose a la severidad de la hipoxemia.

La relevancia de estas enfermedades y su impacto en la salud justifican la necesidad de estudios que permitan evaluar el daño pulmonar y detectar patologías específicas. Existen diversos métodos para ello, como la oximetría de pulso, la espirometría y los estudios por imágenes, como radiografías de tórax, entre otros [13].

En este contexto, se considera fundamental el estudio morfológico de los alvéolos para analizar el grado de daño pulmonar. Como se mencionó anteriormente, este trabajo aborda el problema mediante el análisis de la estructura alveolar en situaciones de colapso y la morfología en casos de ruptura de las paredes alveolares, utilizando la distancia de Hausdorff y los diagramas de Voronoi, respectivamente.

Capítulo 3

Objetivos

3.1. Objetivo general

El objetivo de este trabajo es estudiar un modelo matemático que cuantifique el daño pulmonar a través de aproximaciones obtenidas con distancia de Hausdorff y diagramas de Voronoi, con el fin de aplicarlo a imágenes médicas reales.

La distancia de Hausdorff es una herramienta ideal para trabajar con análisis de la forma de un objeto. Dada su precisión para medir la similitud y considerar características importantes de los conjuntos, la convierte en una opción idónea para este proceso de aproximación. En el contexto de las imágenes médicas, donde las diferencias sutiles pueden ser indicativas de diversos estados patológicos, esta distancia resulta especialmente útil para abordar el problema de daño pulmonar permitiendo obtener información de cuanto cambia la forma de un pulmón sano mientras se va deteriorando.

Asimismo, los diagramas de Voronoi, comúnmente encontrados en diversos patrones de la naturaleza, se pueden hallar también a priori en la forma de los alvéolos. Por ello, estos diagramas son importantes para analizar el mecanismo de deterioro pulmonar que se puede notar en la disminución de alvéolos visibles en imágenes médicas. La idea es poder encontrar una relación entre el número de teselaciones de Voronoi y el número de alveolos observables.

El modelo entonces se construirá en base a aproximaciones obtenidas de las mediciones con distancia de Hausdorff y los diagramas de Voronoi realizados desde imágenes de alvéolos, para poder dar pie a estudio de los cambios pulmonares y proporcionará ayuda para la toma de decisiones médicas.

3.2. Objetivos específicos

Para alcanzar el objetivo general se detalla el procedimiento a seguir en los puntos a continuación:

1. Estudiar la distancia de Hausdorff y cómo realizar su aplicación al problema médico con la rugosidad de alvéolos. Esto, con el propósito de calcular la distancia con imágenes de prueba y reales, para generar datos que permitan hacer la clasificación. Consultar el capítulo 5 para revisar estos resultados.
2. Analizar diagramas de Voronoi para explorar la relación entre el mecanismo de destrucción de paredes alveolares con la fusión de centros de teselaciones. Revisar capítulo 6 para ver estos resultados.

3. Implementar computacionalmente un algoritmo que permita lo estudiado en imágenes médicas reales y estimar el nivel de deterioro de los pulmones según el análisis de clasificación del estado alveolar o morfología pulmonar.

Capítulo 4

Estado del arte

El estudio del deterioro pulmonar ha sido abordado desde diversas disciplinas, incluyendo la neumología clínica, la bioingeniería y el análisis computacional de imágenes médicas. En particular, la modelación matemática del daño alveolar ha cobrado relevancia debido a su potencial para mejorar el diagnóstico y seguimiento de enfermedades pulmonares crónicas como la enfermedad pulmonar obstructiva crónica (EPOC), la fibrosis pulmonar y el enfisema.

4.1. Modelamiento matemático del daño alveolar

El deterioro alveolar implica la alteración de la morfología y distribución de los alvéolos, lo que puede analizarse mediante herramientas matemáticas que cuantifican cambios estructurales. Entre estas, la distancia de Hausdorff ha sido utilizada para medir diferencias morfológicas en imágenes médicas, particularmente en segmentación de estructuras biológicas (Karimi & Salcudean, 2019 [8] y Frank R. Schmidt and Yuri Boykov [16]). Esta métrica permite evaluar la similitud entre formas, haciendo posible cuantificar el grado de deterioro de los alvéolos a lo largo del tiempo. Su uso ha sido validado en estudios de segmentación pulmonar y análisis de tejidos afectados por enfermedades respiratorias.

Paralelamente, los diagramas de Voronoi han demostrado ser herramientas eficaces para modelar la disposición espacial de estructuras biológicas. Se han aplicado en el análisis de tejidos celulares (Aurenhammer et al., 2013 [2]) y recientemente en estudios pulmonares, donde han sido utilizados para modelar la redistribución de los alveolos en función de la destrucción de las paredes alveolares (Villa et al., 2024 [19]). Este tipo de modelado es particularmente relevante en enfermedades como el enfisema, donde la pérdida de paredes alveolares o el colapso genera una redistribución espacial de los alvéolos restantes.

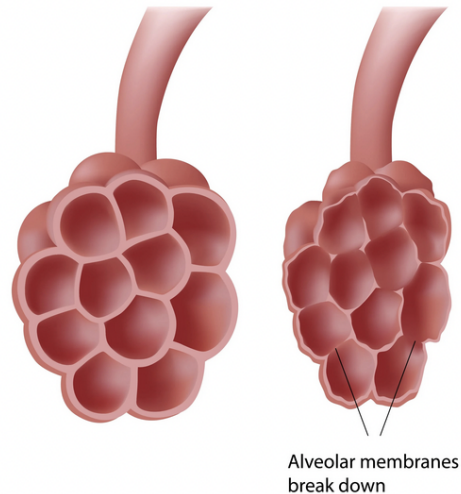


Figura 4.1: Ilustración de alvéolos que son afectados por enfisema, mostrando como cambia su morfología a causa de la pérdida de elasticidad en las paredes alveolares, pudiendo provocar la destrucción de ellas. [7]

En la figura (4.1) se observa la transición del alvéolo hacia un estado de mayor rugosidad como consecuencia del enfisema. Este cambio estructural justifica el uso de la distancia de Hausdorff para cuantificar la evolución morfológica del alvéolo a lo largo del tiempo.

4.2. Modelamiento de colapso de alvéolos

Aunque los pulmones están expuestos a la presión transpulmonar, los espacios aéreos dentro de ellos se distienden únicamente por fuerzas aplicadas desde los tejidos circundantes.

Los pulmones están expuestos a la presión transpulmonar, pero los espacios aéreos dentro de ellos se distienden únicamente por fuerzas aplicadas desde los tejidos circundantes. Mead et al. (1970) [10] estudiaron que, en pulmones no uniformemente expandidos, la presión efectiva de distensión difiere de la presión transpulmonar y tiene el signo adecuado para reducir la no uniformidad. Esta interdependencia en la distensión de los espacios aéreos influye en varios aspectos de la función pulmonar, incluyendo:

- El tamaño de los espacios aéreos que pueden expandirse desde un estado libre de gas.
- La estabilidad estática y dinámica de los espacios aéreos.
- La sequedad de los espacios aéreos.
- Las fuerzas que distienden las vías aéreas y los vasos sanguíneos dentro de los pulmones.
- La distribución del edema pulmonar.

La función principal de esta interdependencia mecánica parece ser el soporte para una expansión uniforme de los espacios aéreos. Gracias a este fenómeno, es posible estudiar la forma de los alvéolos y analizar cómo cambian durante el colapso. Además, es viable el estudio sobre cómo se redistribuyen los alvéolos vecinos en respuesta a la ruptura de una pared o al colapso de un alvéolo, reorganizándose para llenar el espacio vacío.

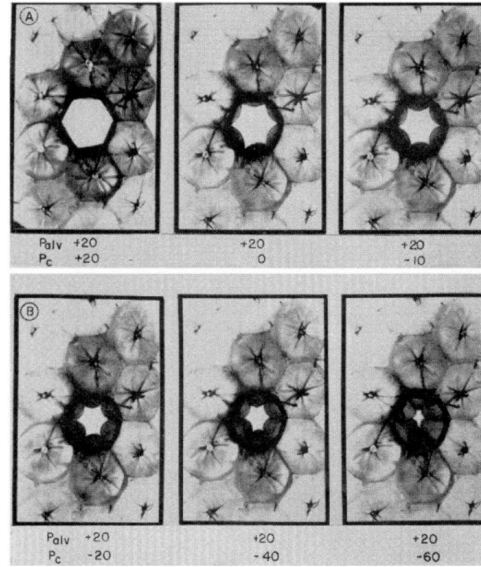


Figura 4.2: Modelo de condones realizado por Mead et al., 1970 para estudiar cómo actúan las fuerzas de las paredes ante distintos niveles de presión. [10]

La figura (4.2) muestra un experimento con condones para modelar el comportamiento mecánico del tejido pulmonar. Los autores simularon la expansión y colapso de los alvéolos bajo diferentes condiciones de presión. Este enfoque permite analizar la relación entre la tensión superficial y la estabilidad alveolar, utilizando un objeto cotidiano para modelar fenómenos científicos y comprender el colapso pulmonar en el distrés respiratorio.

4.3. Aplicación de la distancia de Hausdorff en la segmentación de imágenes médicas

La distancia de Hausdorff ha sido utilizada ampliamente en análisis de imágenes médicas, particularmente en la evaluación de métodos de segmentación de estructuras pulmonares. En un estudio de Karimi & Salcudean (2019) [8], se propuso una técnica de reducción de la distancia de Hausdorff en redes neuronales para mejorar la segmentación en imágenes de tomografía computarizada (CT). Sus resultados mostraron que esta métrica proporciona una evaluación precisa de la diferencia entre contornos de estructuras anatómicas segmentadas automáticamente y sus referencias manuales.

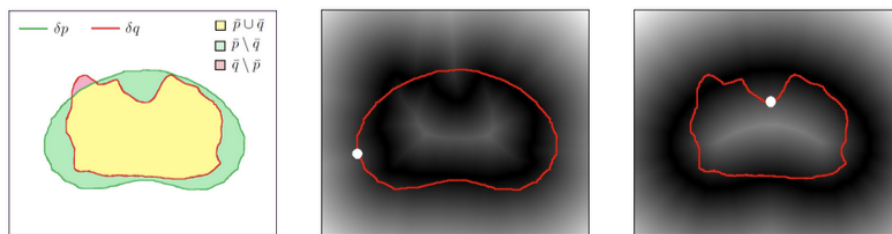


Figura 4.3: Esquema que muestra la distancia de Hausdorff entre conjuntos obtenidos de imágenes médicas. Recuperado de Karimi & Salcudean (2019). [8]

La figura (4.3) ilustra la aplicación de la transformada de distancia en la evaluación de segmentaciones médicas. Estas visualizaciones destacan cómo las diferencias entre las segmentaciones real y predicha se cuantifican utilizando la distancia de Hausdorff, proporcionando una medida del error máximo en la segmentación.

En el contexto pulmonar, la distancia de Hausdorff ha sido aplicada en la cuantificación de irregularidades en los bordes de los alveolos afectados por enfermedades pulmonares obstructivas. Su implementación en imágenes médicas permite detectar patrones de colapso alveolar y evaluar la progresión del daño estructural con mayor precisión en comparación con otras métricas tradicionales, como la distancia euclidiana.

4.4. Diagramas de Voronoi en el análisis de estructuras pulmonares

Los diagramas de Voronoi han sido aplicados en múltiples áreas de la biología y la medicina para modelar la organización espacial de estructuras celulares. Estudios previos han explorado su uso en la segmentación de tejidos y en la caracterización de redes alveolares (Okabe et al., 1999 [14]). En particular, la generación de diagramas de Voronoi a partir de imágenes pulmonares permite analizar la distribución espacial de los alveolos y cómo estos cambian en respuesta a la degradación de sus paredes.

Villa et al. (2024) [19] realizaron un estudio en el que es posible hacer diagramas de Voronoi para modelar la estructura alveolar en ratas expuestas a diferentes concentraciones de elastasa, una enzima que degrada la elastina y simula condiciones de enfisema pulmonar. Su investigación mostró que la fusión de alveolos causada por la destrucción de las paredes alveolares puede representarse mediante la fusión de centros en diagramas de Voronoi, lo que sugiere una correspondencia matemática entre los cambios estructurales observados en las imágenes y los modelos teóricos.

4.5. Integración de métodos matemáticos en el estudio del daño pulmonar

La combinación de la distancia de Hausdorff y los diagramas de Voronoi representa un enfoque innovador para cuantificar la progresión del daño alveolar en imágenes médicas. La primera permite evaluar con precisión las deformaciones en la morfología pulmonar, mientras que los segundos ofrecen un marco estructural para analizar la reorganización espacial de los alveolos afectados. Estudios recientes han comenzado a explorar la sinergia entre estos métodos para mejorar la detección y clasificación del daño pulmonar en modelos experimentales y clínicos (Aurenhammer et al., 2013 [2]; Villa et al., 2024 [14]).

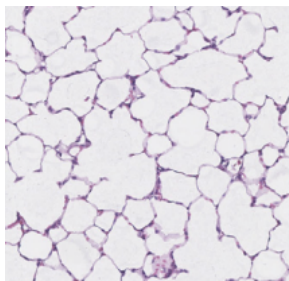


Figura 4.4: Imagen de alvéolos recuperados de Villa et al., 2024 que permiten observar secciones para estudio vía diagramas de Voronoi. Recuperado de Villa et al., 2024. [14]

Desde lo observado en la figura (4.4), es posible construir diagramas de Voronoi que modelen la distribución y las interacciones espaciales de las estructuras observadas. Esto permite analizar con mayor precisión la organización geométrica y los cambios estructurales asociados a patologías respiratorias, proporcionando una base matemática para la evaluación del deterioro alveolar.

Dado el creciente interés en la aplicación de herramientas matemáticas para el análisis de enfermedades respiratorias, es esperable que futuras investigaciones continúen refinando estos modelos y explorando su integración con algoritmos de inteligencia artificial para mejorar la segmentación y evaluación del deterioro pulmonar.

Capítulo 5

Distancia de Hausdorff

En este capítulo, se introduce la distancia de Hausdorff, junto con sus propiedades fundamentales. Posteriormente, se exploran sus aplicaciones en el análisis de la desecación natural de uvas y en el estudio de imágenes de estructuras pulmonares reales. El capítulo concluye con una presentación de los resultados obtenidos a partir de estas mediciones. Dado que la distancia de Hausdorff es particularmente adecuada para trabajar en el contexto de conjuntos compactos, es pertinente considerar las uvas y estructuras pulmonares como tales conjuntos para su análisis.

5.1. Definición

A continuación se define la distancia de Hausdorff, que es una métrica que mide qué tan lejos está un conjunto compacto del otro en un espacio métrico, determinando la mayor de las distancias mínimas desde cada punto de un conjunto hasta el otro. Antes, se presenta la definición de espacios métricos y propiedades básicas.

Sea $X \neq \emptyset$, se denomina *espacio métrico* si con dos puntos p y q cualesquiera de X se asocia un número real $d(p, q)$, llamada distancia de p a q , tal que:

- (a) $d(p, q) > 0$ si p es distinto de q ; $d(p, p) = 0$
- (b) $d(p, q) = d(q, p)$;
- (c) $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$, para $r \in X$.

Un conjunto A , subconjunto de X , es *acotado* si hay un número real M y un punto $q \in X$ tal que $d(p, q) < M$ para todo $p \in A$.

Se dice que a es un *punto interior* del conjunto $X \subset \mathbb{R}$ cuando existe un número $\varepsilon > 0$ tal que el intervalo abierto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ está contenido en X . El conjunto de los puntos interiores de X se llama *interior* del conjunto X , y se representa mediante $\text{int } X$.

Cuando $a \in \text{int } X$ se dice que el conjunto X es un *entorno* o una *vencidad* del punto a . Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se llama *abierto* si $A = \text{int } A$, esto es, cuando todos los puntos de A son puntos interiores de A .

Se dice que un punto a es *adherente* del conjunto $X \subset \mathbb{R}$ cuando es límite de alguna sucesión de puntos $x_n \in X$. Todo punto $a \in X$ es adherente a X : basta tomar todos los $x_n = a$. Se llama *clausura* de un conjunto X al conjunto $\bar{X}$ formado por todos los puntos adherentes a X . Se tiene $X \subset \bar{X}$. Si $X \subset Y$ entonces $\bar{X} \subset \bar{Y}$.

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se dice *compacto* si es cerrado y acotado.

Ahora, se define la distancia de Hausdorff entre conjuntos compactos.

Definición 5.1.1 *Distancia de Hausdorff:*

Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ dos conjuntos compactos no vacíos y d definida como la distancia euclídeana entre conjuntos dada por $d(A, B) = \inf\{d_E(a, b), a \in A, b \in B\}$, donde d_E corresponde a la distancia euclídeana en $\mathbb{R}^n$. Se define la distancia de Hausdorff como:

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(A, b) \right\} \quad (5.1)$$

5.1.1. Ejemplo de distancia de Hausdorff entre el círculo unitario y disco cerrado

Para ilustrar el uso de la distancia de Hausdorff se tienen el círculo unitario S^1 y el disco cerrado $\bar{\mathbb{D}}$ de radio 1, $\bar{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup S^1$, donde $\mathbb{D}$ corresponde al disco abierto de radio 1. Al superponerlos se obtiene la imagen a continuación.

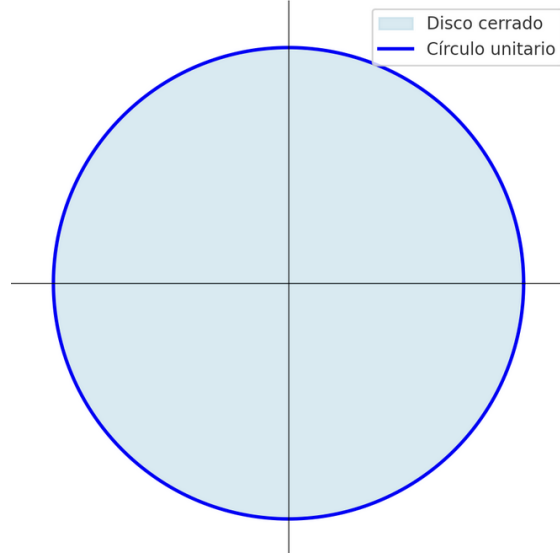


Figura 5.1: Distancia de Hausdorff para S^1 y $\bar{\mathbb{D}}$, donde ambos son conjuntos compactos. Generada con IA.

La distancia de Hausdorff de (5.1) se calcula entonces midiendo primero el supremo de todas las distancias desde puntos en S^1 que van a $\bar{\mathbb{D}}$ y viceversa. Se tiene que $\sup_{a \in S^1} d(a, \bar{\mathbb{D}}) = 0$ y $\sup_{b \in \bar{\mathbb{D}}} d(S^1, b) = 1$, por lo que al tomar el máximo el valor será 1.

$$d_H(S^1, \bar{\mathbb{D}}) = 1$$

Más generalmente, se consideran dos conjuntos compactos, X e Y . Luego para realizar el cálculo, se toma un punto $x \in X$ y se recorren todos los puntos de Y , entonces se obtiene el supremo de todas las distancias de x a Y . Así, se repite de igual manera para $y \in Y$. Finalmente se calcula el máximo de ambos supremos y se obtiene el resultado buscado.

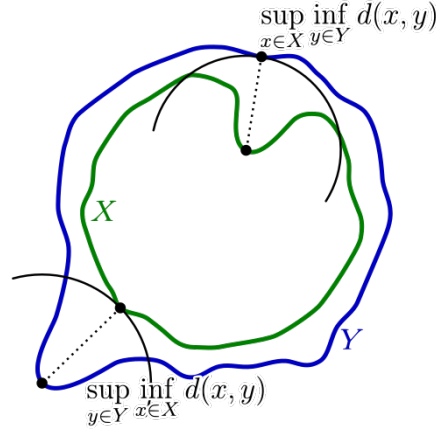


Figura 5.2: Ejemplo de imagen para distancia de Hausdorff. [20]

En la imagen (5.2) se observa como con dos conjuntos, X e Y , se calcula la distancia de Hausdorff recorriendo todos los puntos desde un conjunto al otro como ya se mencionó antes.

5.1.2. Distancia de Hausdorff y distancia euclídeana entre conjuntos

La distancia de Hausdorff suele ser más precisa que la distancia euclídeana. Esto se puede ver reflejado en el ejemplo de el círculo unitario y el disco cerrado visto previamente.

Como se estudió antes, en el ejemplo (5.1.1), al realizar los cálculos de distancias en (5.1), por un lado el valor de la distancia euclídeana es 0, pues es el ínfimo de las distancias. Por otro lado al calcular la distancia de Hausdorff el valor obtenido será 1, pues toma el supremo y abarca más información en la medición. Esto es,

$$d(S^1, \bar{\mathbb{D}}) = \inf\{d_E(p, q), p \in S^1, q \in \bar{\mathbb{D}}\} = 0 \quad p \in S^1, q \in \bar{\mathbb{D}}$$

$$d_H(S^1, \bar{\mathbb{D}}) = \max\left\{\sup_{a \in S^1} d(a, \bar{\mathbb{D}}), \sup_{b \in \bar{\mathbb{D}}} d(S^1, b)\right\} = 1$$

El hecho de que la distancia euclídeana sea 0 no entrega información sobre la diferencia de los conjuntos, en cambio la distancia de Hausdorff si logra explicar que existe una separación entre el disco cerrado y el círculo unitario. Esto se debe a que la distancia usual no distingue entre subconjuntos, entonces como $S^1 \subset \bar{\mathbb{D}}$ la distancia euclídeana de conjuntos será 0.

Lo anterior se puede generalizar tomando dos conjuntos X e Y , tal que $X \subset Y$. Entonces al calcular la distancia de $d(x, y) \quad x \in X, y \in Y$ existe $x \in X$ que a su vez pertenece a Y . Así, $d(x, x) = 0$. Por lo tanto, la distancia euclídeana de dos conjuntos, cuando uno está incluido en el otro, es 0.

La elección entre estas métricas siempre depende del contexto a analizar. La distancia euclídeana es adecuada para ser medida entre puntos individuales y cuando los conjuntos son disjuntos, mientras que la distancia de Hausdorff es más apropiada para comparar conjuntos compactos y formas completas como es el foco de interés de este trabajo. Dado que esta métrica se basa en la evaluación de supremos e ínfimos de distancias entre puntos de los conjuntos analizados, es crucial garantizar que dichos valores sean alcanzables. La compacidad juega un papel clave en este contexto, ya que implica existencia de máximos y mínimos, al tener continuidad.

En conjuntos compactos dentro de espacios métricos, el teorema de Weierstrass, el cual se presenta más adelante, asegura que funciones continuas alcanzan sus valores extremos. En consecuencia, la

distancia de Hausdorff está bien definida en estos conjuntos, lo que permite su aplicación rigurosa en la modelización de estructuras pulmonares y otros sistemas geométricos en el análisis biomédico. El teorema garantiza la existencia de valores máximos y mínimos de una función continua cuando su dominio es compacto.

Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, definida en el conjunto no vacío $X \subset \mathbb{R}$ se dice *continua en el punto* $a \in X$ cuando, para todo $\varepsilon > 0$, se puede obtener $\delta > 0$ tal que $x \in X$ y $|x - a| < \delta$ impliquen que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Para más detalles ver [9].

Luego $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se llama *función continua* cuando f es continua en todos los puntos $a \in X$.

Teorema 5.1.2 *Teorema de Weierstrass* Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua en el conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$. Entonces existen $x_0, x_1 \in X$ tales que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in X$.

Se obtiene el Teorema de Weierstrass como consecuencia de que la imagen de un conjunto compacto por una función continua es un conjunto compacto, lo que implica que los valores de supremo e ínfimo son alcanzables dentro del dominio.

Esto es crucial porque indica que la distancia de Hausdorff no tomará valores infinitos cuando se trabaje con conjuntos compactos. Si los conjuntos fueran no compactos, podrían existir sucesiones de puntos cuyas distancias diverjan, haciendo que la métrica de Hausdorff sea infinita o no bien definida en ciertos casos. La restricción a compactos, garantiza la existencia de puntos que realmente alcanzan las distancias supremas consideradas, permitiendo una interpretación geométrica robusta y consistente en la modelización de cambios estructurales biológicos como los de alvéolos.

5.1.3. Segmentación de imágenes médicas

La distancia de Hausdorff encuentra aplicaciones significativas en la segmentación de imágenes médicas, especialmente en aquellas que han sido preprocesadas en formatos binarios o en escala de grises.

Este enfoque permite identificar y delimitar regiones específicas dentro de una imagen, minimizando la distancia entre un contorno de referencia y el generado por un modelo o algoritmo de segmentación.

En el contexto de las radiografías, por ejemplo, la minimización de la distancia de Hausdorff se emplea para optimizar la precisión de la segmentación, logrando una mejor aproximación a la región de interés, como áreas afectadas por patologías específicas. Este proceso resulta particularmente útil en la detección de anomalías pulmonares, segmentación de tumores en imágenes de resonancia magnética, y la delineación de tejidos en tomografías computarizadas.

Los métodos que buscan reducir la distancia de Hausdorff suelen combinar técnicas avanzadas de optimización con algoritmos de aprendizaje profundo o enfoques tradicionales de segmentación. Karimi & Salcudean (2019) [8] presentan detalles exhaustivos sobre los procedimientos y estrategias para minimizar esta métrica, destacando su relevancia en aplicaciones clínicas donde la precisión de los contornos es crítica.

En suma, la distancia de Hausdorff no solo ofrece una herramienta robusta para medir la similitud entre formas, sino que también puede actuar como un criterio esencial para evaluar y mejorar los resultados de segmentación en imágenes médicas.

5.2. Analogía morfológica de alvéolos

El estudio inicial sobre el deterioro pulmonar se enfocó en analizar la morfología de los alvéolos y cómo esta se ve afectada por distintas condiciones médicas.

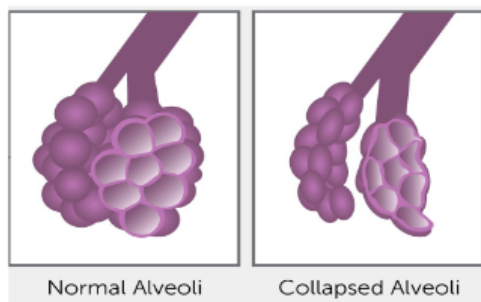


Figura 5.3: Ilustración de como cambia la morfología del alvéolo cuando pasa de estado normal a colapsado. [3]

A partir de estas observaciones, se propuso un modelo para describir los cambios estructurales: los alvéolos sanos fueron comparados con un racimo de uvas frescas, mientras que los alvéolos deteriorados se asemejaron al mismo racimo en estado de pasas como se observa en (5.3). Esta analogía permitió diseñar un modelo experimental con resultados preliminares y evaluar métodos de análisis en un contexto controlado.

El procedimiento experimental consistió en capturar semanalmente fotografías de dos racimos de uvas. La periodicidad semanal fue seleccionada para garantizar que los cambios morfológicos fueran perceptibles, ya que las transformaciones diarias no resultaban suficientemente evidentes al comienzo del estudio.

En las siguientes secciones se detalla como procede el experimento y sus resultados.

5.3. Análisis de cambio morfológico alveolar

Se utilizó la analogía entre el comportamiento de redistribución espacial de los alvéolos y el proceso de desecación natural de racimos de uvas como punto de partida. Esta comparación permitió explorar el deterioro de los alvéolos mediante el proceso de transformación de una uva a su estado de pasa, utilizando la distancia de Hausdorff como herramienta de análisis. Esta distancia se elige para llegar a medir la variación en la forma de los alvéolos con el tiempo.

Se implementó un código en MATLAB que permite procesar las imágenes y calcular la distancia de Hausdorff. Los análisis iniciales con las uvas sirvieron para validar el código y establecer una base para aplicaciones en imágenes pulmonares. Una vez verificada la funcionalidad del método, será aplicable para el análisis a casos médicos reales.

El uso de imágenes semanales secado natural de racimos de uvas permitió observar cómo la rugosidad se volvía más evidente con el paso del tiempo. Este procedimiento establece un marco comparativo para medir cambios en la forma y irregularidad de los objetos analizados. La distancia de Hausdorff será clave para segmentar imágenes médicas y obtener representaciones más precisas de los alvéolos. También se usa para comparar estados de rugosidad, permitiendo clasificar y cuantificar las variaciones en la forma, tanto en modelos experimentales como en aplicaciones clínicas.

5.3.1. Procedimiento para la medición de distancia de Hausdorff

Para medir la distancia de Hausdorff de las uvas, se tomaron fotografías de racimos de uvas semanales para poder calcular la distancia de Hausdorff a través de un programa realizado en MATLAB. El código utilizado para este análisis se encuentra detallado en el anexo de este documento.

Las imágenes fueron recopiladas durante un periodo de otoño e invierno de 2024, bajo condiciones ambientales estables. Las uvas eran mantenidas bajo techo y con buena iluminación. Con una temperatura promedio aproximada entre 14°C y 20°C.



Figura 5.4: Imágenes del primer racimo de uvas capturadas por 6 semanas.



Figura 5.5: Imágenes del segundo racimo de uvas capturadas por 6 semanas.

En (5.4) se presenta la recopilación de 6 semanas de el primer racimo y en (5.5) de el segundo, donde comienzan en su estado de uvas y terminan convirtiéndose en pasas.

El programa consiste en que dada una imagen de un racimo de uvas, se marca una máscara de una uva en particular y se repite para la misma uva en una semana avanzada, con esto se realiza una superposición de las uvas y se mide la distancia de Hausdorff. De este modo, se aplicaba a dos imágenes correspondientes al mismo racimo, pero distinta fecha de captura, siempre midiendo con respecto a la semana inicial, marcando los contornos de las uvas para poder calcular la distancia de Hausdorff de ambas máscaras obtenidas.

5.3.2. Resultados de mediciones de distancia de Hausdorff a imágenes comparativas a alvéolos

Durante el experimento de recopilación de imágenes que documenta la transformación de las uvas a pasas en ambos racimos, se conservaron únicamente los datos correspondientes a las cinco primeras semanas. Esto se debió a que, en la sexta semana, la caída de algunas uvas del racimo dificultó la identificación precisa de correspondencias entre las mismas uvas analizadas en la semana inicial y las de dicha semana. Esta inconsistencia en la asociación de elementos impidió realizar una comparación confiable a partir de ese punto del experimento, por lo que se descartó la última semana en el proceso de medición.

Se presenta la primera tabla que resume los resultados obtenidos del cálculo de la distancia de Hausdorff aplicada a los racimo de uvas. Este análisis permite cuantificar los cambios morfológicos experimentados por una uva específica al compararla con su estado inicial en la primera semana. La distancia utilizada proporciona una medida objetiva y útil para evaluar el grado de transformación estructural a lo largo del tiempo, reflejando los efectos del deterioro en el racimo de manera cuantitativa.

UVAS	DISTANCIA12	DISTANCIA13	DISTANCIA14	DISTANCIA15
A	8,25	35,51	38,47	52,77
B	5,39	26,00	28,16	41,88
C	12,65	19,24	22,83	31,24
D	10,30	21,93	23,35	26,25
E	7,62	35,01	38,33	44,72
F	7,28	20,25	23,41	34,54
G	14,14	25,08	25,63	27,46
H	12,81	14,32	22,56	35,44
I	14,42	16,28	18,25	22,36
J	8,54	11,70	13,15	14,56
K	17,69	29,55	31,02	21,84
L	7,21	8,49	11,66	29,41
M	17,26	29,61	31,32	50,77

Figura 5.6: Datos recopilados de aplicación de distancia de Hausdorff a un racimo de uvas.

Se debe considerar que en estas mediciones siempre se considera con respecto a la figura inicial, es

decir, las distancias presentadas son medidas en relación al primer racimo de uvas. Esto fue hecho así para poder observar qué tanto se aleja la uva de su estado inicial durante el proceso de secado natural y de esta manera, analizar cómo aumenta la distancia de Hausdorff en cada caso.

En (5.6) se observa cómo a medida que avanzan las semanas, aumenta la distancia de Hausdorff con respecto a la primera en casi todas las uvas. Notar que, la segunda columna corresponde a la primera medición de distancia de Hausdorff de la segunda semana con respecto a la primera y así respectivamente con las demás columnas se tiene el valor de medición con respecto a semana inicial.

También se aplica el método al segundo conjunto de racimos de uvas recopilados durante un periodo de seis semanas. Este conjunto permite observar los cambios que ocurren con el tiempo, constituyendo así la segunda etapa de validación para comprobar la funcionalidad del programa basado en la distancia de Hausdorff.

Entonces se tiene la siguiente tabla con las distancias recopiladas de las uvas del segundo conjunto. Los resultados reflejan un comportamiento similar al observado con el primer conjunto: a medida que transcurren las semanas, las distancias entre las uvas aumentan progresivamente. Este comportamiento es consistente con las expectativas y respalda la hipótesis inicial. el hecho de que la distancia vaya creciendo es un buen resultado porque se está midiendo con respecto a la semana inicial, entonces se espera que la distancia muestre que la rugosidad va aumentando a medida que pasan los días.

UVAS	DISTANCIA12	DISTANCIA13	DISTANCIA14	DISTANCIA15
N	17,26	14,87	19,03	18,38
O	4,47	12,73	16,40	27,73
P	6,71	12,37	16,55	24,41
Q	10,00	21,63	29,15	24,19
R	6,40	18,03	21,10	35,00
S	8,54	28,28	34,83	49,65

Figura 5.7: Datos recopilados de aplicación de distancia de Hausdorff al segundo racimo de uvas.

En en (5.7) se observa también como semana a semana aumenta la distancia de Hausdorff con respecto a las uvas del comienzo.

La recopilación de estos datos permitió generar estas tablas consolidadas que muestran de manera clara el incremento en las distancias, sirviendo como evidencia del correcto funcionamiento del método implementado. Estos resultados preliminares sugieren que el enfoque basado en la distancia de Hausdorff podría ser extendido y aplicado de manera efectiva en el análisis de imágenes médicas, ofreciendo un gran potencial en aplicaciones más complejas y reales.

Posteriormente, se generó un gráfico comparativo que combina los datos de ambos conjuntos de racimos, mostrando cómo las distancias evolucionan semana a semana. Este gráfico permite visualizar de manera integral el patrón de aumento en las distancias, reforzando la validez de la metodología empleada.

Los datos recopilados evidencian un incremento progresivo en la distancia de Hausdorff con respecto a la primera semana, reflejando las transformaciones morfológicas a lo largo del tiempo. En (5.8) se presentan todas las uvas medidas y su cálculo de distancia por semanas. Las barras de color verdes corresponden a las distancias calculadas entre la semana inicial y la final, por lo que se puede notar que la mayoría de las distancias va en crecimiento y se puede estudiar más a detalle.

DISTANCIAS DE UVAS DE LA SEMANA INICIAL (1) A LAS SIGUIENTES (2 - 5)

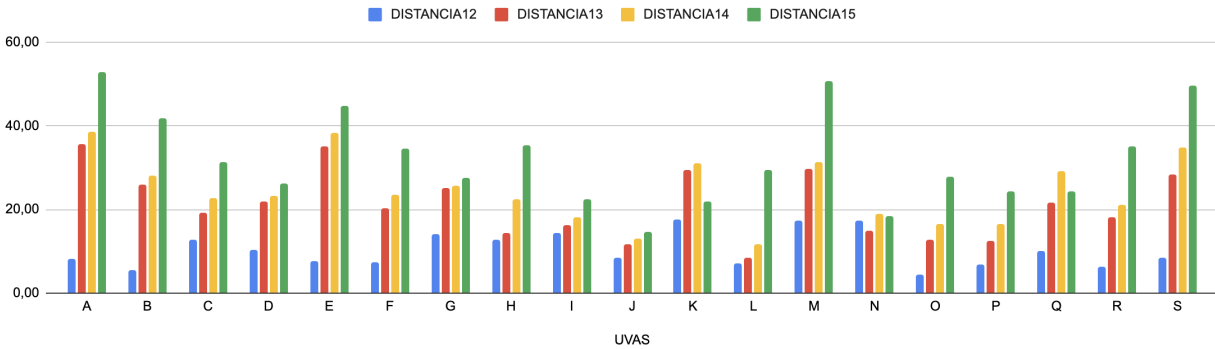


Figura 5.8: Datos recopilados de aplicación de distancia de Hausdorff a un racimo de uvas.

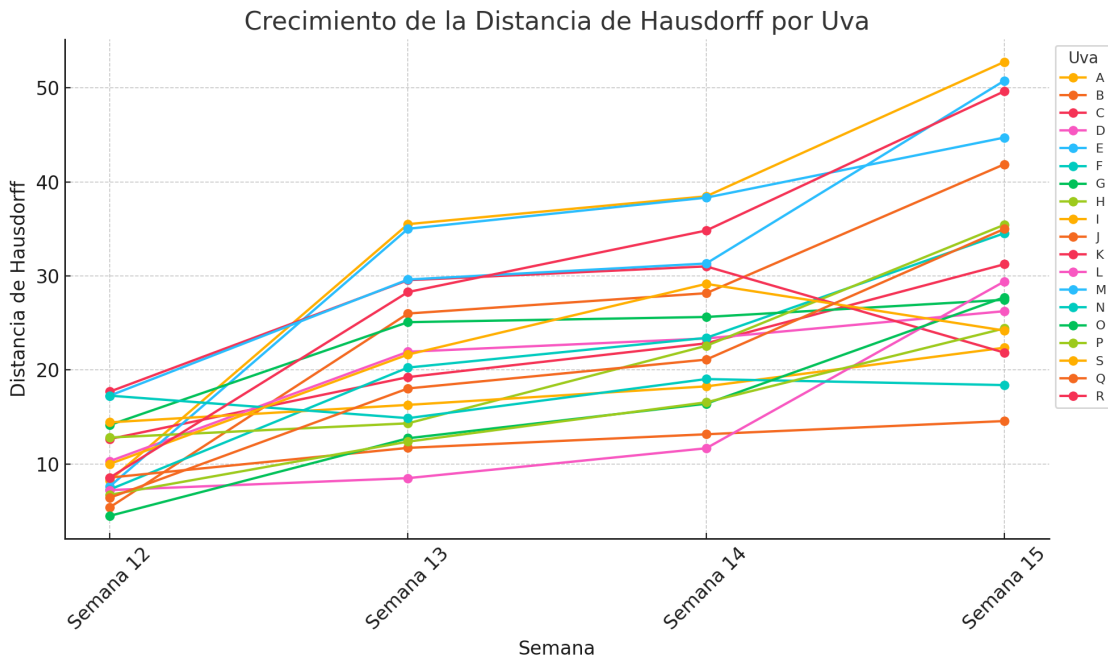


Figura 5.9: Tasa de crecimiento de uvas.

Para poder estudiar mejor este incremento, se realizó un análisis de gráfico de tasa de crecimiento, se puede observar en la imagen siguiente. Se observa un crecimiento generalizado de la distancia de Hausdorff a lo largo de las semanas en la mayoría de las uvas en (5.9). Aunque todas las uvas siguen un patrón de crecimiento, hay diferencias en la velocidad con la que aumentan sus valores. Sin embargo, no todas siguen un patrón lineal, ya que algunas muestran aceleraciones o desaceleraciones en diferentes semanas.

Se observa un comportamiento de crecimiento similar en algunas uvas, pero en su mayoría es progresivo. Así, el crecimiento de la distancia de Hausdorff es evidente en todas las uvas, pero no de manera uniforme.

Este análisis preliminar resulta clave para evaluar la viabilidad de extender esta metodología al estudio de estructuras biológicas de características similares. En colaboración con especialistas médicos, se identificaron imágenes anatómicas cuya morfología se asemeja a la de un racimo de uvas, lo que sugiere la posibilidad de aplicar este enfoque en otros contextos anatómicos con fines de interpretación y diagnóstico.

5.4. Aplicaciones a imágenes de pulmones

Existe un procedimiento de reclutamiento alveolar, el cual es un proceso terapéutico utilizado en pacientes con insuficiencia respiratoria para restablecer la función pulmonar, reducir el esfuerzo respiratorio y mejorar la oxigenación. Consiste en la reexpansión de las unidades alveolares colapsadas mediante el uso de un parámetro de presión positiva al final de la espiración (PEEP, por sus siglas en inglés). Este parámetro mantiene una presión dentro de las vías respiratorias al final de la exhalación, se basa en la aplicación de una presión adicional dentro de las vías respiratorias al concluir la fase de exhalación. Esta presión evita el colapso de los alvéolos, manteniéndolos abiertos y facilitando el intercambio de oxígeno y dióxido de carbono.

En condiciones patológicas como el síndrome de dificultad respiratoria aguda (SDRA), el pulmón presenta áreas de atelectasia, donde los alvéolos están colapsados y no participan adecuadamente en el intercambio gaseoso. El uso adecuado del PEEP incrementa la presión en los pulmones y favorece la reexpansión de estos alvéolos, mejorando la ventilación en zonas previamente hipoventiladas.

Una estrategia común para optimizar el reclutamiento alveolar es la maniobra de reclutamiento escalonada, donde se aumenta progresivamente el PEEP en etapas controladas hasta alcanzar un nivel que permita la apertura de la mayor cantidad posible de alvéolos. Esto ayuda a redistribuir el aire en los pulmones, mejorando la oxigenación sin causar daños por sobrepresión. Tras alcanzar el nivel óptimo de PEEP, se puede reducir gradualmente la presión para evitar el colapso posterior de las unidades alveolares.

En numerosos casos de pulmones que son sometidos a un periodo de distintos niveles de PEEP, se evidencia una progresiva reexpansión del tejido pulmonar, reflejada en una disminución de las áreas opacas. Este cambio sugiere una recuperación funcional, dado que los alvéolos previamente desinflados comienzan a inflarse nuevamente favoreciendo una mejor aireación y un intercambio gaseoso más eficiente, además las áreas que bajaron su opacidad representan a los alvéolos aireados, lo que implica el alivio que se ha generado.

Para mostrar el funcionamiento del reclutamiento alveolar con el uso de PEEP se recopilaron las siguientes imágenes de pulmones, pertenecientes a un cerdo, que pasaron por este procedimiento.



Figura 5.10: Pulmón antes de que se le aplique la primera ventilación. [6]

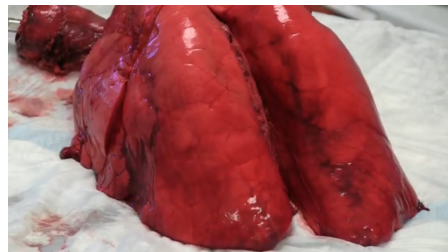


Figura 5.11: Muestra de como se infla el pulmón durante la ventilación. [6]



Figura 5.12: Imagen a continuación de un ciclo respiratorio realizado en 5.12. [6]

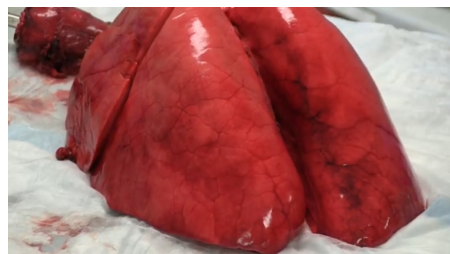


Figura 5.13: Imagen final del resultado obtenido después de todo el proceso. [6]

Estas imágenes fueron recuperadas de un vídeo de youtube [6] para poder mostrar como cambia el pulmón, tanto en su forma, como en sus tonalidades. Como se mencionó antes, las áreas oscuras corresponden al daño por atelectasia y se pueden evidenciar en (5.10), luego en (5.13) es notorio como estas áreas han prácticamente desaparecido y esto corresponde a un alivio del daño. Además se puede notar claramente el cambio de tamaño por el que ha pasado el pulmón luego de varios PEEP con distintos niveles de intensidad en aumento y luego cuando va a finalizar se hace una disminución paulativamente.

Para poder realizar la medición de distancia de Hausdorff no serán usadas las imágenes previamente mostradas, puesto que el pulmón al aumentar su tamaño no se ve completamente, entonces no son imágenes ideales, sin embargo fueron recuperadas otras imágenes de otro proceso de reclutamiento alveolar [11] que se muestran a continuación:

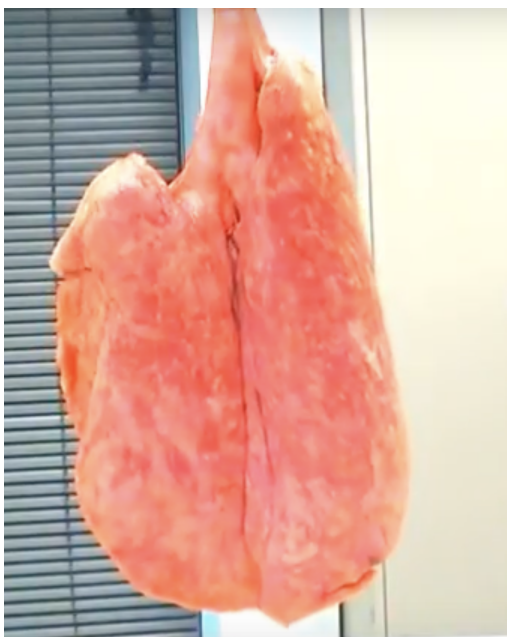


Figura 5.14: Primera imagen capturada de pulmón dañado. [11]

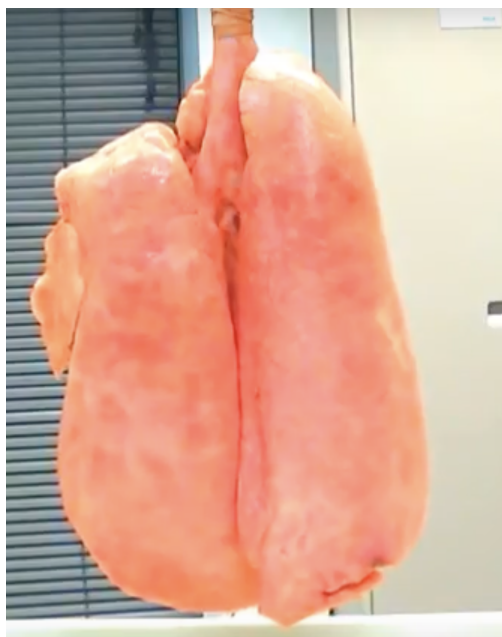


Figura 5.15: Última imagen capturada de pulmón con menos daño. [11]

Estos pulmones, provenientes de un organismo no identificado, también muestran modificaciones en su morfología y patrón de coloración. Como se observa en la figura (5.15), la presencia de áreas más claras es más evidente en comparación con la figura (5.14), lo que sugiere un incremento en la aireación pulmonar. Este fenómeno puede estar asociado a la redistribución del volumen pulmonar y a

la reapertura de unidades alveolares previamente colapsadas, reflejando así una mejora en la ventilación regional.

5.4.1. Resultados de medición de distancia de Hausdorff a pulmones durante proceso de ventilación mecánica.

Con estas nuevas imágenes, se aplica el mismo procedimiento previamente utilizado en el análisis de las uvas. Calculando la distancia Hausdorff del pulmón derecho se obtienen los siguientes datos:

N° de ciclos respiratorios	Valores de DH
5	9,43
10	32,28
15	41,62
20	53,45
25	53,71
30	51,43
35	55,36
40	59,03
45	61,07
50	72,62
55	71,85
60	85,21
65	89,59
70	90,27

Figura 5.16: Datos de distancia de Hausdorff de pulmón dañado.

A partir de los datos obtenidos, se puede apreciar como la distancia va aumentando conforme se aplican niveles progresivos de PEEP. Comienza la ventilación sola sin PEEP y luego aumentan el PEEP hasta 17 cmH2O. Cada imagen fue capturada con una diferencia de 5 ciclos respiratorios, por lo que en total se recopilaron 14 imágenes con un total de 70 aplicaciones de ventilación. Para estos datos se obtiene un gráfico que ilustra la evolución de la distancia de Hausdorff en función de los ciclos respiratorios que van sucediendo.

El gráfico (5.17) indica la tendencia de la distancia de Hausdorff que aumenta conforme ocurren más ciclos respiratorios. La recta de regresión representa la tendencia promedio del crecimiento de la distancia respecto a los ciclos. La pendiente positiva indica que a mayor número de ciclos respiratorios, mayor es la distancia de Hausdorff, lo que sugiere un patrón de expansión en los pulmones de las imágenes analizadas. Se observa que el modelo lineal es adecuado, para evidenciar mejor esto se realizará regresión lineal.

Para obtener la recta que explica el crecimiento en el gráfico, se realiza una regresión lineal a partir de los datos. Se tiene una función de la forma:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

donde y es la variable dependiente, que corresponde a los valores de distancia de Hausdorff, x es la variable independiente, que vendrían siendo los ciclos respiratorios realizados. Además, β_0 es la intersección con el eje y , β_1 es la pendiente de la recta, y ε representa el término de error.

Distancia de Hausdorff (DH) de pulmón

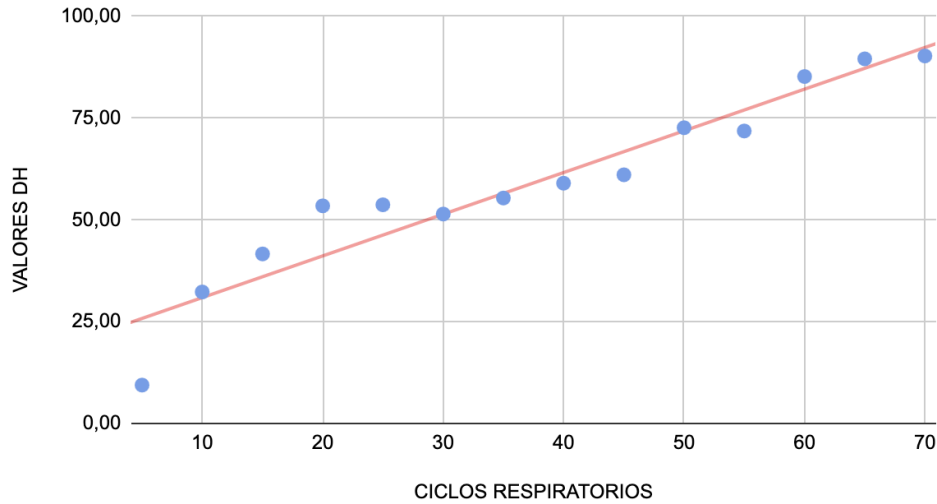


Figura 5.17: Gráfico de dispersión con mediciones de pulmón.

Mediante el método de mínimos cuadrados, para ajustar una recta al conjunto de datos. Se realizan los siguientes cálculos para obtener la función en cuestión.

$$\beta_1 = \frac{n \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{n \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2}$$

$$\beta_0 = \frac{\sum_i y_i - \beta_1 \sum_i x_i}{n}$$

De esta manera se obtiene que la ecuación de regresión lineal es:

$$y = 1,02x + 20,67 + \varepsilon$$

El coeficiente de determinación (R^2) es la proporción de la varianza total de una variable explicada por una regresión e indica qué tan bien un modelo se ajusta a la variable que pretende explicar.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$$

En este caso R^2 es aproximadamente 0.91, es decir, 91 % de la variabilidad de los datos se explica por el modelo lineal, lo que sugiere un buen ajuste.

Con este resultado final se puede resumir que la distancia de Hausdorff es una herramienta matemática útil en la medición de formas de objetos, en segmentación de imágenes y con esto poder estudiar el daño observado en un pulmones.

Capítulo 6

Diagramas de Voronoi

Este capítulo comienza con la definición de un diagrama de Voronoi y sus propiedades. Luego se realizan aproximaciones de secciones alveolares mediante la construcción de estos diagramas, considerando distintos niveles de afectación de elastasa, que es una enzima que se encuentra en el páncreas, los neutrófilos y los macrófagos alveolares. Su función es degradar las fibras elásticas. Además, se llevan a cabo simulaciones de fusión de puntos generadores de Voronoi para el estudio y modelación de la destrucción de paredes de alvéolos.

6.1. Definición

Los diagramas de Voronoi proporcionan una forma matemática rigurosa de modelar proximidad y distribución espacial de elementos en un dominio. En la naturaleza se suele observar variados patrones que pueden ser representados por estos diagramas. Además, su construcción basada en distancias los convierte en una herramienta fundamental para la optimización y segmentación de espacios, consolidando su utilidad en diversas áreas del conocimiento. Para más aplicaciones y propiedades, ver Aurenhammer et al., 2013 en [2].

Definición 6.1.1 *Se define el diagrama de Voronoi de P como la subdivisión del plano en n regiones convexas, una para cada $p_i \in P$, cumpliendo la propiedad de proximidad en la que un punto q pertenece a la región de un sitio p_i si y sólo si*

$$\|p_i - q\| < \|p_j - q\|, p_j \in P, j \neq i. \quad (6.1)$$

Con el diagrama de Voronoi se forman secciones convexas a partir de puntos, que serán llamados centros de masa o generadores, y que están denotados por p_i . Estas subdivisiones deben cumplir la desigualdad (6.1). En el problema que se aborda se consideran imágenes médicas de alvéolos que presentan la forma de secciones aparentemente no convexas y se quiere estudiar la relación que podría existir con estos diagramas.

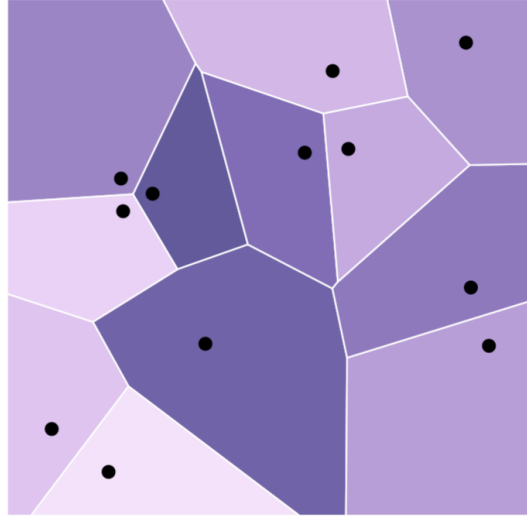


Figura 6.1: Ejemplo de diagrama de Voronoi para 12 puntos generados aleatoriamente.

Es necesario también describir las partes de un diagrama de Voronoi, que se pueden observar en la imagen a continuación.

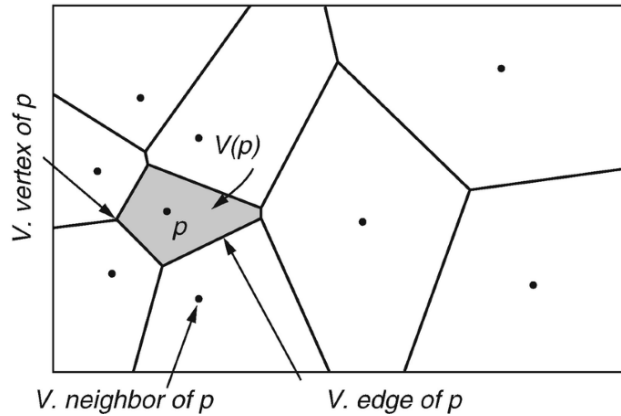


Figura 6.2: Partes de un diagrama de Voronoi. [17]

Se tiene en (6.2) que para un punto $p \in P$, se denota como $V(p)$ a la sección del punto p (correspondiente al área gris) y a p se le llamará generador. Luego $V(p)$ contiene aristas y vértices como se puede visualizar en la siguiente imagen y los puntos generadores que conectan directamente con $V(p)$ son los vecinos de p .

6.2. Metodología

Se plantea entonces una posible relación entre los alvéolos observados en imágenes médicas con distintos porcentajes de una enzima y las secciones convexas que se pueden obtener al generar el diagrama de Voronoi.

La primera imagen médica obtenida en esta investigación es recuperada del artículo de Villa, B. et al. (2024) [19]. La cual muestra cuatro etapas de estado alveolar cuando se realizó una aplicación de

distintos porcentajes de elastasa, que es una enzima proteolítica, cuya función principal es la degradación de la elastina que puede derivar en fibrosis pulmonar o enfisema.

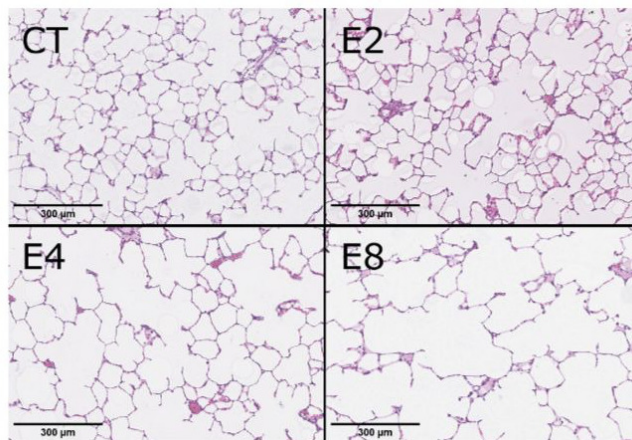


Figura 6.3: Imagen representativa del campo de visión de la estructura alveolar de los grupos experimentales para un área escogida aleatoriamente. Recuperado de Villa et al., 2024. [14]

Se observan cuatro estados en (6.3), donde CT corresponde a la etapa de control donde no se ha aplicado elastasa. Los siguientes estados, E2, E4 y E8, corresponden a distintos porcentajes de concentración de elastasa. E2 tiene un 20 %, E4 tiene un 40 % y E8 tiene un 80 % de la enzima en cuestión. Cabe mencionar que en la figura anterior cada una de las cuatro imágenes corresponde a distintas ratas.

Se propuso en primera instancia hacer un diagrama de Voronoi inverso a partir de esta imagen, es decir, que dadas las secciones sean entregados los centros de masa.

El problema de determinar los puntos generadores a partir de las secciones de un diagrama de Voronoi es un problema complejo, de hecho es considerado un problema NP-hard [14], es decir, no tienen un algoritmo conocido que los resuelva en un tiempo razonable (polinómico) para entradas grandes. La dificultad de estos problemas está relacionada con la cantidad de opciones posibles, que crecen exponencialmente a medida que aumenta el tamaño del problema. Entonces comenzamos con una aproximación sencilla que permita abordar el problema de manera computacionalmente factible y obtener resultados preliminares útiles.

Como primera aproximación de este resultado se busca generar los centros de masa de las secciones alveolares de forma que se cumpla la desigualdad (6.1) en el mayor grado posible y así generar un diagrama de Voronoi. Luego con estas secciones obtenidas de los centros de masa ubicados manualmente, se debe realizar un análisis de la imagen médica real (figura 6.3) con las secciones convexas de Voronoi obtenidas y así obtener mejores conclusiones.

En esta aplicación, se seleccionó un área en la parte superior derecha de cada etapa representada en la figura (6.4) y se marcaron los centros de masa aproximados para generar el diagrama Voronoi.

De esta manera resultaron los siguientes diagramas:

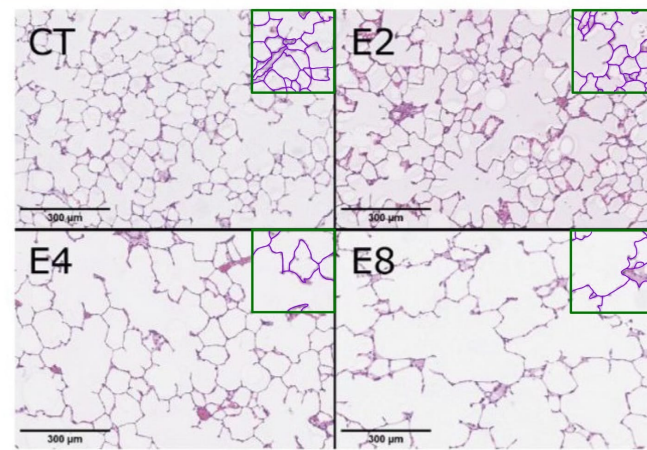


Figura 6.4: Secciones marcadas en verde utilizadas para aproximar por diagramas de Voronoi. [14]

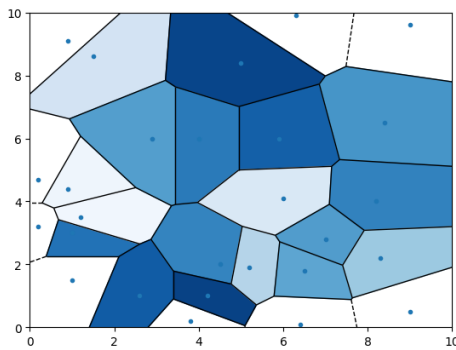


Figura 6.5: Voronoi de área alveolar seleccionada de CT.

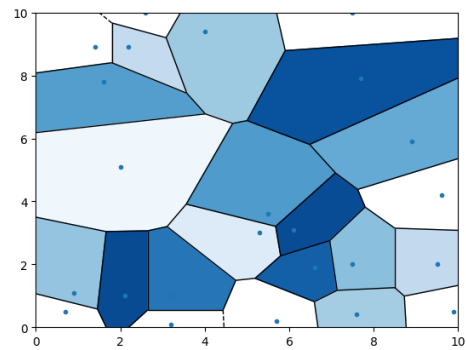


Figura 6.6: Voronoi de área alveolar seleccionada de E2.

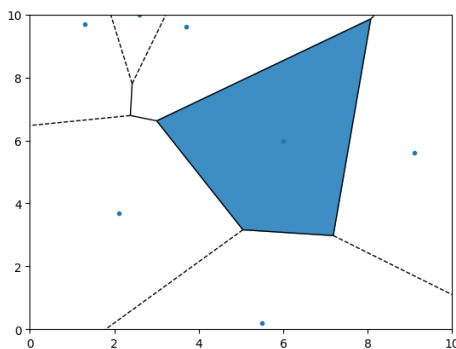


Figura 6.7: Voronoi de área alveolar seleccionada de E4.

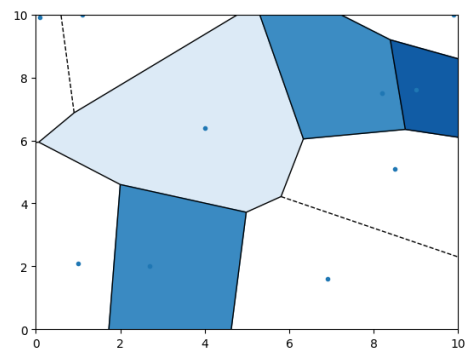


Figura 6.8: Voronoi de área alveolar seleccionada de E8.

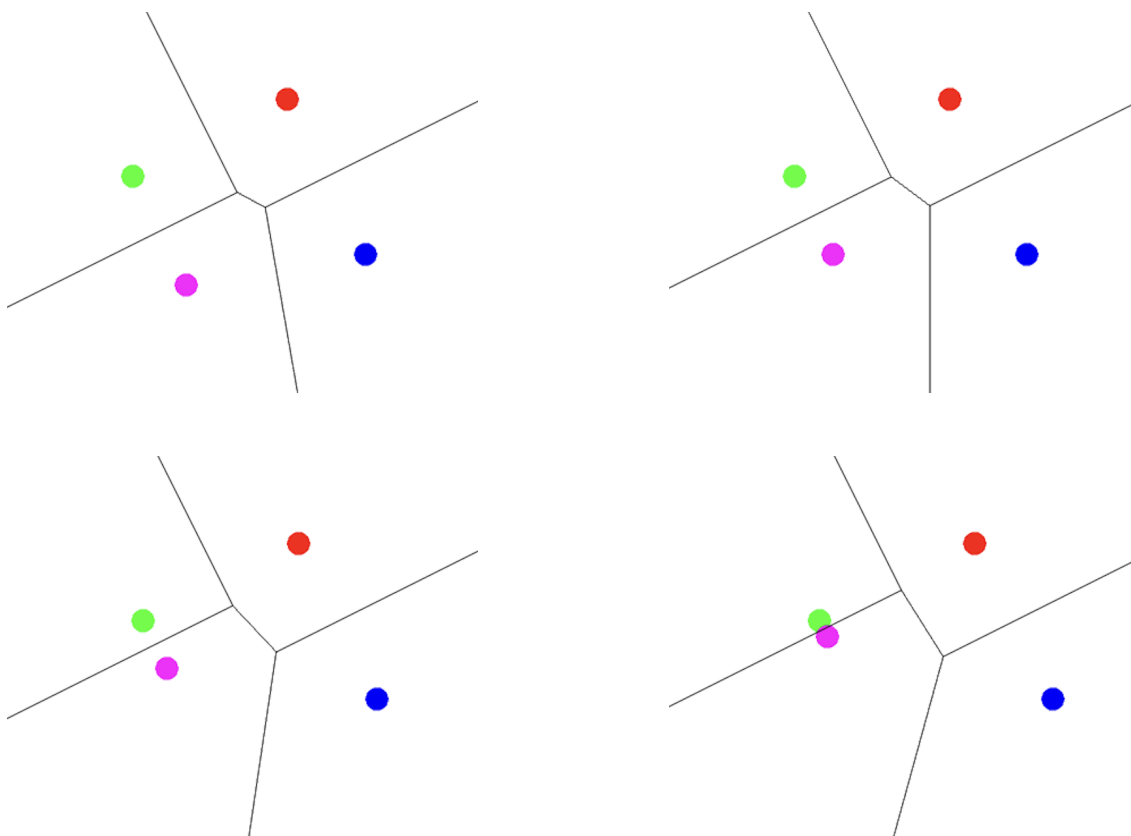
Se puede ver que a medida que se añade más elastasa existen secciones que se unen y esto puede ser provocado porque hay paredes alveolares que se terminan rompiendo secundariamente al uso de esta encima. Pese a que la imagen corresponde a distintas ratas y no está mostrando como progresa el daño por la elastasa, mas bien ayuda a ver como la apariencia de los alvéolos cambia cuando están

más enfermos. Entonces debido a que las secciones alveolares se ven más grandes en las últimas etapas conjeturamos que esto podría tener relación con la fusión de centros de masa en la aproximación por Voronoi.

6.3. Simulaciones de fusión de puntos en un diagrama de Voronoi

Para el estudio del mecanismo de destrucción de paredes alveolares, se inició simulando lo que ocurre cuando dos centros de masa de un diagrama de Voronoi se fusionan. Esto se planteó debido a la similitud observada entre el proceso de quiebre de paredes de alvéolos y la unión de puntos generadores de Voronoi. Por esta razón, se comenzó analizando el efecto de esta fusión entre dos puntos de un conjunto dado.

Como ejemplo, en el caso de cuatro puntos, si dos de ellos se fusionan, el diagrama de Voronoi resultante es equivalente al generado directamente para tres puntos. Este resultado permite visualizar cómo la reducción en el número de centros modifica la estructura del diagrama, simulando de manera aproximada lo que ocurre cuando hay un quiebre de paredes alveolares, que da una apariencia de que existieran menos alvéolos, pero en realidad es que hay una coalescencia alveolar.



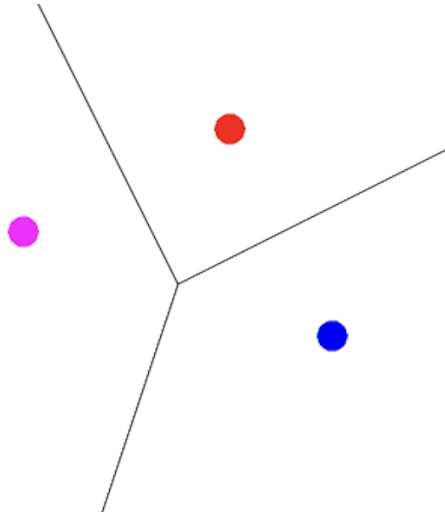


Figura 6.9: Simulación de fusión de 2 centros de un conjunto de 4, terminada en 3 puntos generadores de Voronoi.

6.4. Probabilidad de coalescencia de puntos en diagramas de Voronoi

Las paredes alveolares pueden experimentar diversas modificaciones estructurales como el adelgazamiento progresivo, el colapso localizado o, en casos más avanzados, la desaparición de los tabiques interalveolares. Estos cambios pueden estar asociados a patologías pulmonares como la enfermedad pulmonar obstructiva crónica (EPOC), el enfisema o la fibrosis pulmonar, y afectan significativamente la función respiratoria al reducir la superficie de intercambio gaseoso.

Desde una perspectiva matemática, este fenómeno puede modelarse mediante un algoritmo de fusión de centros en un diagrama de Voronoi, el cual representa la disposición espacial de los alvéolos y sus respectivas interconexiones. En dicho modelo, se asume que la fusión de alvéolos contiguos ocurre de manera probabilística y aleatoria en cualquier punto de la red alveolar, simulando así el proceso de degradación estructural observado en imágenes médicas. Esta aproximación permite analizar cuantitativamente el impacto de la destrucción de las paredes alveolares y su relación con la progresión del daño pulmonar.

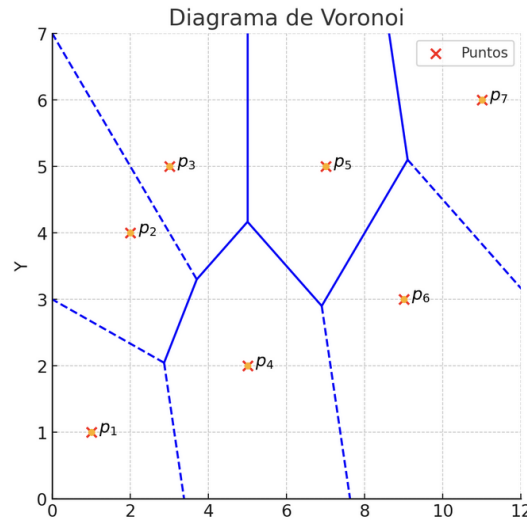
Se propone entonces un algoritmo de fusión de centros Voronoi para poder simular el mecanismo de quiebre de paredes alveolares. Se determina probabilísticamente un punto y se escoge un vecino para realizar la fusión, de esta manera se simula la destrucción de una pared alveolar con una nueva teselación de Voronoi generada por nuevos puntos actualizados incluyendo el recién fusionado.

6.4.1. Algoritmo de probabilidad de coalescencia de puntos

- **Etapas 1:** Ingresar los puntos y generar el diagrama de Voronoi asociado a los puntos dados.
 Por ejemplo, para mostrar como funciona el algoritmo en esta etapa ingresan siete puntos arbitrarios.

- $p_1 = (1, 1)$
- $p_2 = (2, 4)$
- $p_3 = (3, 5)$
- $p_4 = (5, 2)$
- $p_5 = (7, 5)$
- $p_6 = (9, 3)$
- $p_7 = (11, 6)$

Para los siete puntos dados se obtiene el siguiente diagrama:



- **Etap 2:** Para cada punto p_i , calcular el número de vecinos $N(p_i)$ (por ejemplo, aquellos puntos que están en la misma celda de Voronoi o cercanos). Luego, asignar a p_i una probabilidad de estar involucrado en el proceso de interacción dada por:

$$P(p_i) = \frac{\# \text{vecinos de } p_i}{\sum_k \# \text{vecinos de } p_k}$$

donde la suma en el denominador recorre todos los puntos p_k del conjunto y sus respectivos números de vecinos.

En esta etapa se recorren todos los puntos ingresados y se calcula el número de vecinos correspondientes. Por ejemplo, en este caso para p_1 los vecinos son p_2 y p_4 , por lo que la cantidad de vecinos de p_1 son dos.

- # vecinos de $p_1 = 2$
- # vecinos de $p_2 = 3$
- # vecinos de $p_3 = 3$
- # vecinos de $p_4 = 5$
- # vecinos de $p_5 = 4$
- # vecinos de $p_6 = 2$
- # vecinos de $p_7 = 3$

$$P_{\text{vecino}}(p_j \mid p_i) = \frac{1}{\# \text{vecinos de } p_i}$$

para p_j vecino de p_i .

Para ejemplificar, se supone que se elige p_3 . En este caso los vecinos de p_3 adquieren $\frac{1}{3}$ de probabilidad de salir seleccionados.

- **Etapla 4:** Elegir un punto p_j , vecino de p_i , de acuerdo con la probabilidad $P_{\text{vecino}}(p_j \mid p_i)$, y unir ambos puntos p_i y p_j .

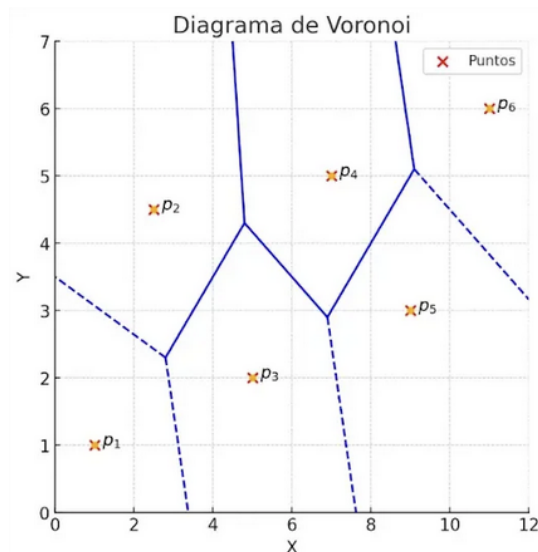
Suponiendo que se elige p_2 , entonces se realiza una fusión de este punto con p_3 que fue seleccionado en la etapa previa.

- **Etapas:**
 - **Etapas 1 y 2:** Se cargan los datos de los puntos de la zona de estudio y se genera el diagrama de Voronoi.
 - **Etapas 3 y 4:** Se seleccionan los puntos que se van a actualizar y se ingresan los nuevos valores.
 - **Etapas 5 y 6:** Se actualiza el diagrama de Voronoi y se genera el nuevo diagrama.

Los nuevos puntos son:

- $p_1 = (1; 1)$
- $p_2 = (2; 5; 4, 5)$
- $p_3 = (5; 2)$
- $p_4 = (7; 5)$
- $p_5 = (9; 3)$
- $p_6 = (11; 6)$

Donde p_2 es el nuevo punto fusionado. Desde aquí se vuelve a la *Etapa 1* y se tiene el nuevo diagrama de Voronoi.



Generalización

Considerando a E_i el evento que sería elegir el punto p_i (de igual manera para j) y V_{ij} los vecinos j de i .

Se define así la probabilidad de elegir un punto generador de Voronoi, de la forma:

$$\mathbb{P}(E_i) = \frac{\sum_j V_{ij}}{\sum_i \sum_j V_{ij}}$$

También, se define la probabilidad condicional de elegir un vecino del punto seleccionado en el paso previo.

$$\mathbb{P}(E_j|E_i) = \frac{1}{\sum_j V_{ij}}$$

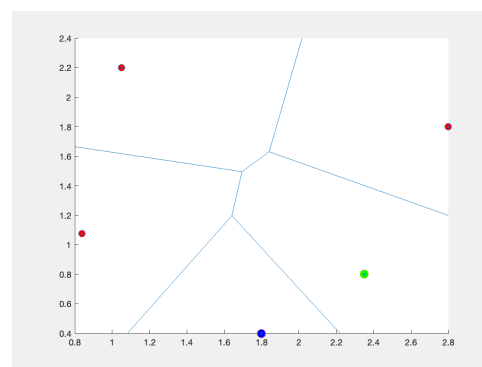
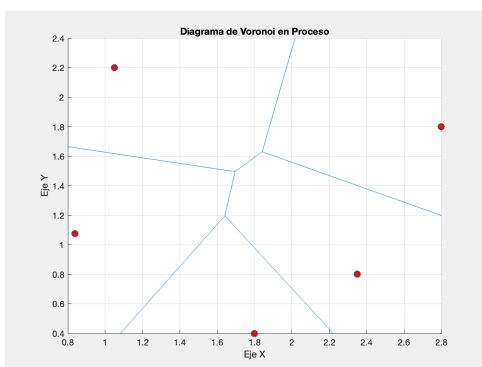
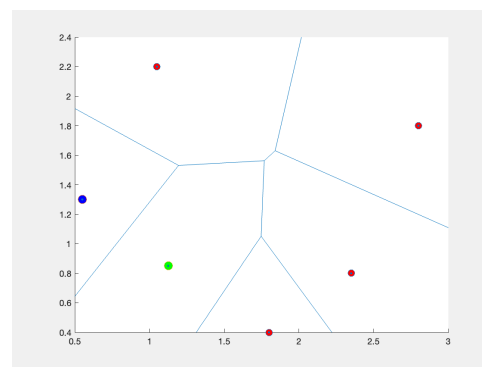
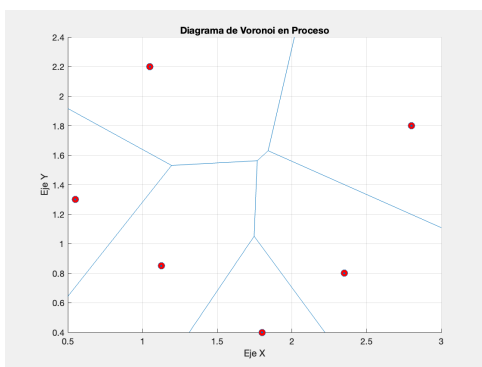
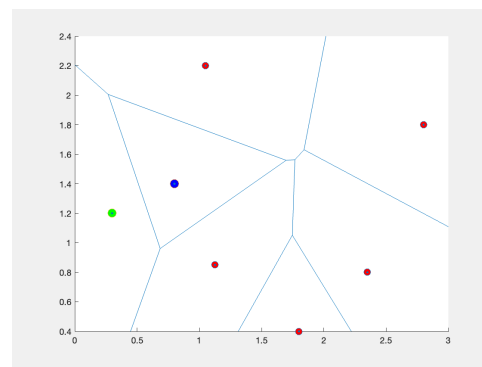
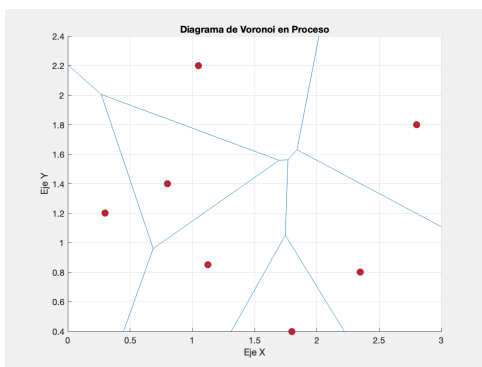
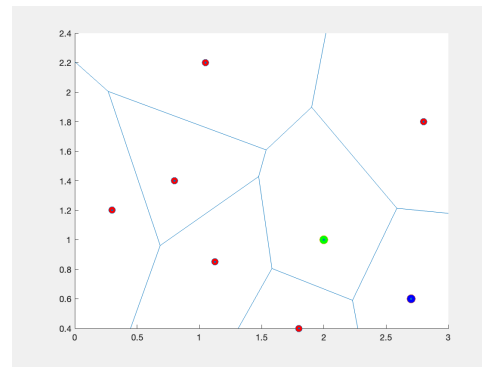
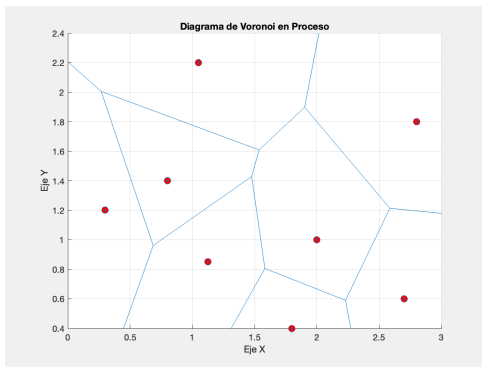
6.4.2. Resultados de la simulación de fusión de puntos

Para realizar la simulación del algoritmo de Voronoi y probabilidades, se ingresó un conjunto P de puntos, donde $P = \{p_1, \dots, p_8\}$. Los puntos de color rojo que se pueden observar en la primer imagen de este proceso, son todos los pertenecientes a P . En la imagen a la derecha de esta se observan dos puntos que han cambiado de color rojo a verde uno y el otro de rojo a azul, esos colores representan los puntos seleccionados en las etapas 3 y 4, según sus probabilidades adquiridas.

Los puntos ingresados en el algoritmo son los siguientes.

- (0,3; 1,2)
- (0,8; 1,4)
- (1; 2,2)
- (1,1; 0,9)
- (1,8; 0,4)
- (2; 1)
- (2,7; 0,8)
- (2,8; 1,8)

De esta manera, se desarrolla la simulación como se visualiza en las imágenes a continuación, hasta llegar a la menor cantidad de puntos que el software utilizado considere congruente.

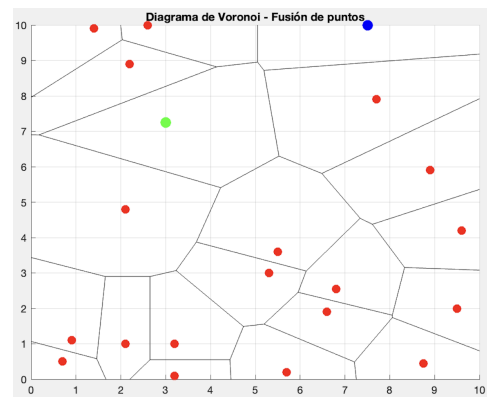
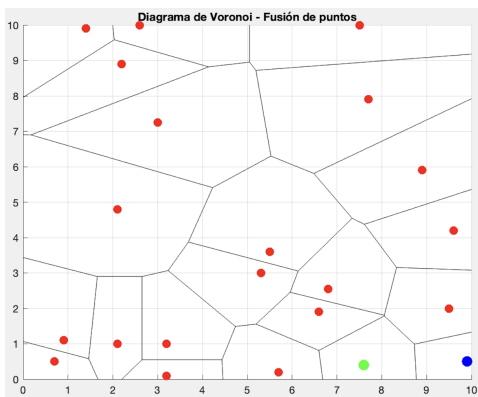
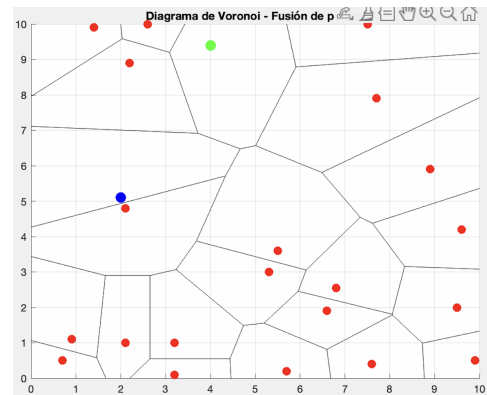
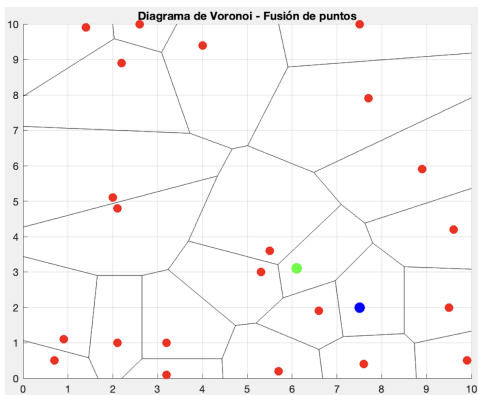


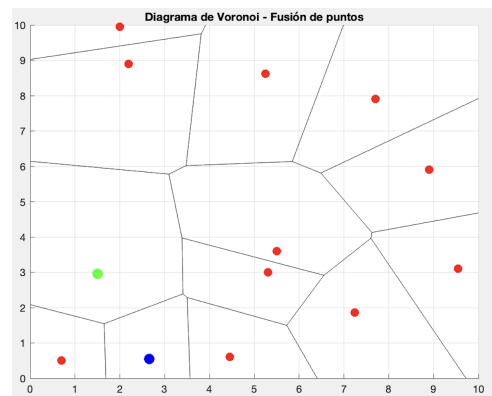
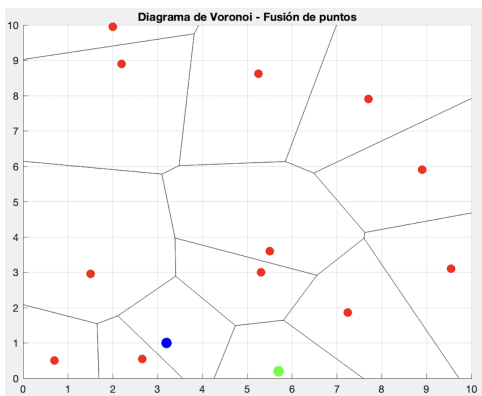
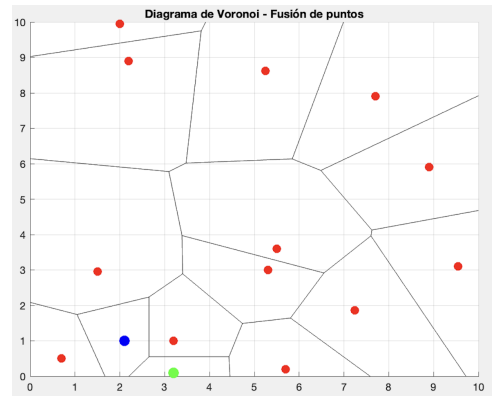
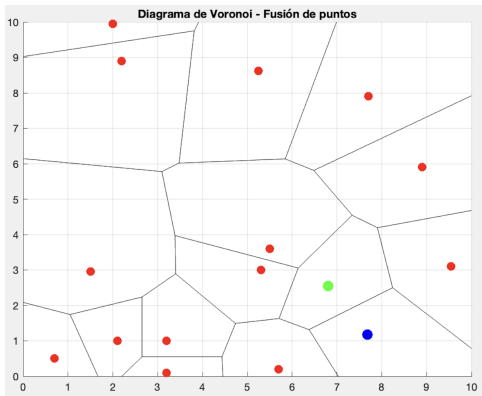
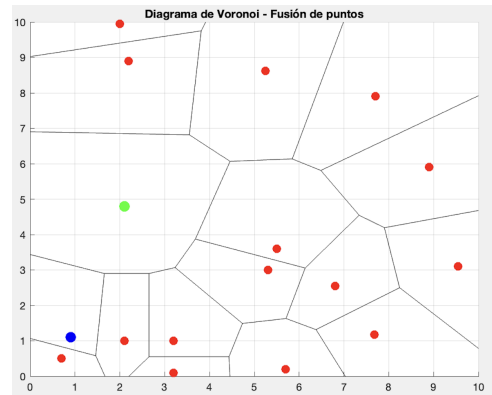
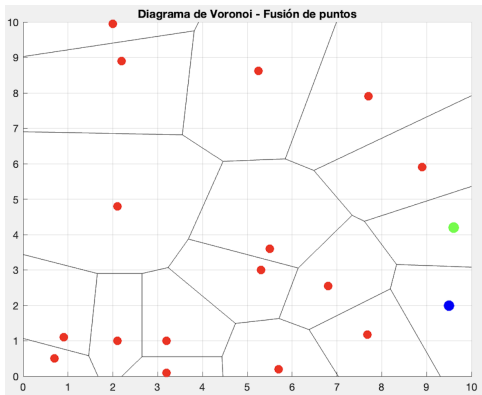
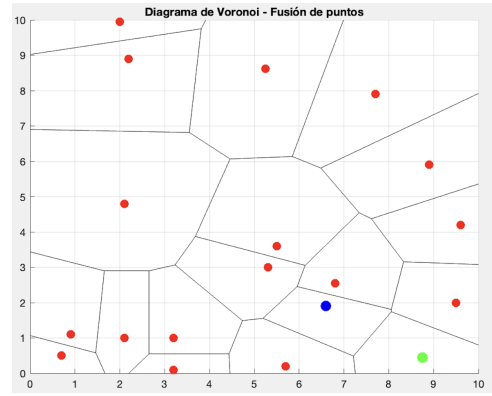
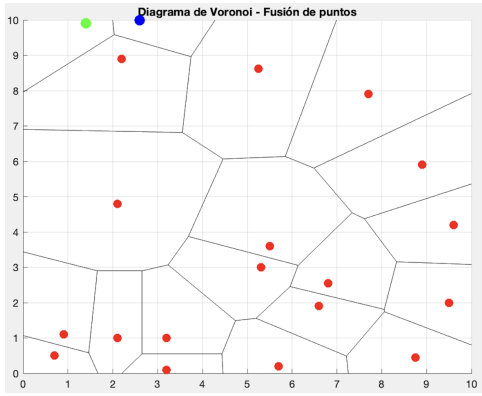
Con estas imágenes podemos explicar la simulación realizada por el algoritmo. Se puede observar que, aunque en principio no parece haber una relación directa entre el quiebre de una pared alveolar y el de su vecino, la probabilidad de que esto suceda sí muestra patrones. El modelo permite observar cómo, con el tiempo y las interacciones entre las paredes, ciertas conexiones de puntos se vuelven más probables de fusionarse, lo que refleja cómo un cambio en una región puede influir en otras, algo que podría verse en condiciones patológicas.

6.4.3. Aplicación de algoritmo de coalescencia de puntos a sección alveolar

Se tiene la imagen (6.4) que contiene secciones marcadas de cada etapa de estudio. Recordando que contenían distintos niveles de elastasa aplicados, se evaluará como sería el avance del daño con el algoritmo presentado previamente.

Entonces tomando arbitrariamente el diagrama de Voronoi (6.6) asociado a la etapa donde se ha aplicado 20 % de elastasa, se realiza el algoritmo basado en los puntos correspondientes de este caso y se obtienen los siguientes diagramas.





Al finalizar el algoritmo llega a un diagrama de esta forma:

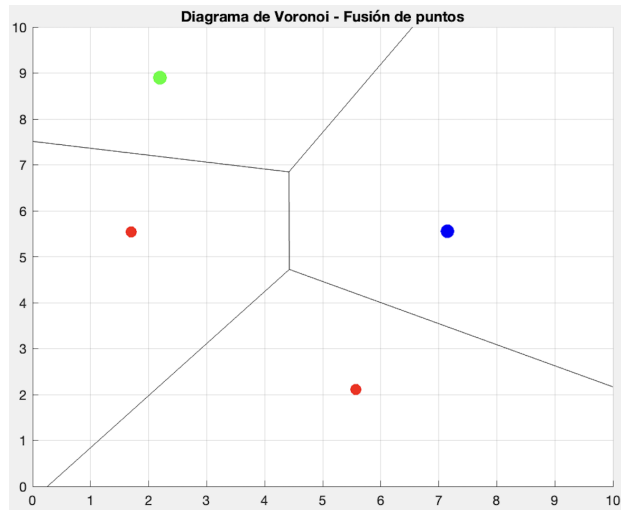


Figura 6.10: Fin del algoritmo con 4 puntos.

Con un total de 20 fusiones correctas de vecinos y 1 no tan precisa (en ella se unieron dos puntos cercanos, mas no vecinos), se obtuvo (6.10) que muestra una forma de avance del daño a medida que se rompen paredes debido a la coalescencia de puntos generadores de Voronoi.

6.5. Observaciones

El problema de encontrar los puntos generadores de un diagrama de Voronoi a partir de una imagen con secciones dadas es complejo, por lo que resulta valioso explorar diferentes enfoques para su resolución. En este trabajo, se utilizó una alternativa basada en la aproximación manual de puntos, respetando la estructura del diagrama de Voronoi. Esta metodología permitió generar un modelo útil para estudiar el quiebre de paredes alveolares en el contexto del daño pulmonar.

El uso de diagramas de Voronoi junto con un enfoque probabilístico ha permitido modelar de manera más realista el quiebre de paredes alveolares en el contexto del daño pulmonar. Aunque inicialmente no parece haber una conexión evidente entre la ruptura de una pared y la de su vecino, el análisis probabilístico revela que ciertos patrones emergen con el tiempo. En particular, la asignación de probabilidades condicionadas a cada punto en función de su cantidad de vecinos muestra que el proceso de degradación alveolar no es completamente aleatorio, sino que sigue una estructura influenciada por el historial de quiebres previos.

Además, el carácter recursivo del modelo, donde cada iteración parte de un nuevo estado basado en los cambios anteriores, sugiere que el daño estructural en el pulmón podría evolucionar de manera cíclica o acumulativa. Este comportamiento podría reflejar la progresión de enfermedades pulmonares crónicas o colapsos alveolares, donde la pérdida de estabilidad en ciertas regiones aumenta la vulnerabilidad de estructuras vecinas.

Capítulo 7

Trabajo futuro

7.1. Distancia de Hausdorff

Gracias a los avances en el uso de la distancia de Hausdorff, inicialmente aplicada al análisis de imágenes de uvas, se logró extender esta metodología al estudio del pulmón y sus cambios estructurales. Este enfoque ha permitido evaluar transformaciones morfológicas, lo que sugiere su potencial aplicación en otros órganos con características similares. De esta manera, el presente trabajo abre la posibilidad de futuras investigaciones que busquen expandir esta técnica a nuevas áreas de estudio en el ámbito biomédico.

Uno de los campos prometedores es el estudio de la rugosidad en imágenes cerebrales, donde la distancia de Hausdorff podría desempeñar un papel clave en la evaluación de cambios estructurales.

Como principal trabajo futuro, se plantea optimizar la lectura de imágenes mediante la reducción del sobreajuste en el cálculo de la distancia de Hausdorff, lo que permitiría medir con mayor precisión las variaciones entre estructuras comparadas evitando en el mayor grado posible la sensibilidad del programa a irregularidades de los objetos.

Otro aspecto relevante que se discutió a lo largo del trabajo fue la posibilidad de calcular la velocidad del cambio morfológico, dado que, conociendo la distancia y los tiempos, es posible determinar la velocidad mediante la ecuación $v = d/t$. Sin embargo, este análisis no fue abordado en profundidad debido a la falta de una referencia de escala en las imágenes utilizadas. Para que el cálculo sea significativo, es necesario contar con una unidad de medición bien definida que permita interpretar correctamente los valores obtenidos a partir de los píxeles de la imagen. En este estudio, tanto en las imágenes de uvas como en las de pulmones, no se disponía de una referencia espacial precisa. No obstante, esta es una línea de investigación futura prometedora, ya que permitiría calcular un tipo de predicción de avance del daño en los tejidos.

Si la distancia de Hausdorff presenta un aumento súbito y significativo, podría ser una señal de alerta sobre un cambio patológico importante. En este caso, al tratarse de una validación del modelo, se observó que tanto las uvas como los pulmones mostraron un cambio relativamente continuo y estable, sin variaciones abruptas en la distancia de Hausdorff.

En promedio, la variación en la distancia fue de 5.57, hay una alta dispersión en el crecimiento de las uvas. Algunas tienen aumentos bruscos, mientras que otras incluso presentan disminuciones en la distancia de Hausdorff. Mientras que en el pulmón el promedio fue de 11.766, en esta medición los valores tienden a aumentar en cada paso, hay algunos aumentos de distancia significativos con respecto a la media y aunque hay algunas fluctuaciones, la mayoría de las diferencias están relativamente cerca

del promedio, lo que podría indicar una tendencia general estable con algunas variaciones. Esto sugiere que, en futuras aplicaciones sobre órganos reales, un modelo adaptado a las irregularidades naturales de los tejidos podría utilizarse como una herramienta de monitoreo clínico. Un incremento repentino en la distancia de Hausdorff podría ser indicativo de una alteración significativa, lo que justificaría una evaluación más detallada del paciente.

Un aspecto final que se planteó como una posible línea de estudio es el uso de la dimensión de Hausdorff para complementar el análisis de rugosidad. Esta herramienta matemática podría permitir una caracterización más precisa de las estructuras presentes en las imágenes, facilitando el estudio de texturas y patrones de irregularidad en distintos tejidos u órganos. Explorar la relación entre la dimensión de Hausdorff y la morfología de las regiones segmentadas podría aportar nuevas perspectivas en el análisis de imágenes biomédicas, abriendo el camino a futuras aplicaciones en diagnóstico y monitoreo clínico.

7.2. Diagramas de Voronoi

Como extensión de este trabajo, sería interesante afinar aún más las probabilidades de selección para reflejar patrones de daño específicos, incorporando factores adicionales como la resistencia estructural de las paredes o la influencia de fuerzas mecánicas en el tejido pulmonar. Asimismo, mejorar la visualización de estos procesos a través de diagramas de Voronoi dinámicos podría proporcionar una interpretación más clara de la propagación del daño, permitiendo su comparación con datos clínicos o experimentales.

Además, con el uso de segmentación de imágenes médicas, sería posible aproximar diagramas de Voronoi directamente a partir de las secciones observadas en una imagen, como en el caso trabajado con las secciones alveolares con aplicación de elastasa, también sería interesante estudiar un caso progresivo que corresponda al mismo individuo y analizar las teselaciones que van desapareciendo. Esto permitiría un enfoque más automatizado y basado en datos reales para estudiar la morfología alveolar y su evolución en presencia de patologías pulmonares.

Finalmente, el algoritmo desarrollado para la fusión de puntos generadores requiere optimización, dado que en ciertas iteraciones las fusiones no fueron completamente precisas. Por ello, un paso fundamental en el trabajo con diagramas de Voronoi es mejorar la descripción y eficiencia del algoritmo, optimizando la unión de los puntos generadores. Esto permitirá un análisis más preciso de la ruptura de paredes alveolares y su progresión, contribuyendo a la continuación del estudio de los deterioro pulmonar u otro órgano que pueda ser aproximado por diagramas de Voronoi.

Capítulo 8

Conclusiones

En este trabajo se han analizado los cambios estructurales en los alvéolos, principalmente asociados al daño pulmonar, mediante el uso de herramientas matemáticas como la distancia de Hausdorff y los diagramas de Voronoi. Estos métodos han permitido estudiar la transformación morfológica provocada por el colapso alveolar y el mecanismo de destrucción de sus paredes.

La distancia de Hausdorff fue una herramienta fundamental para el estudio de la morfología alveolar y pulmonar. La analogía con los racimos de uvas permitió un enfoque estructurado para modelar el comportamiento del pulmón durante el proceso de deterioro. Los resultados preliminares obtenidos a partir de esta analogía fueron coherentes y justificaron la continuidad del estudio, dado que las mediciones indicaban un aumento en la distancia de Hausdorff a medida que avanzaban las semanas. Este comportamiento resultó clave para proyectar los hallazgos a órganos reales con forma similar.

El procedimiento de reclutamiento pulmonar realizado a distintos individuos permitió obtener nuevas imágenes admisibles para una aplicación efectiva del modelo basado en la analogía con los racimos de uvas. La aplicación de la presión positiva al final de la espiración (PEEP) favorece la reapertura de alvéolos colapsados, lo que contribuye a una mejora en la estructura pulmonar y en las capacidades respiratorias de este. Este proceso permitió observar cómo la morfología del pulmón evolucionaba hacia un estado menos deteriorado, contrastando con el patrón de daño progresivo estudiado en la analogía del racimo de uvas.

Si bien no fue posible analizar los alvéolos de manera individual, debido a la dificultad de obtener imágenes con la resolución y estructura necesarias, se optó por evaluar directamente el pulmón. En este caso, el proceso estudiado fue inverso al del racimo de uvas, mientras que en la analogía inicial se analizaba la transformación de una uva en su estado natural hasta su fase rugosa como pasa, en la aplicación pulmonar se partió de un órgano con un daño evidente y se observó una disminución progresiva de este.

Hubo una consistencia en el aumento de la distancia de Hausdorff en todos los casos, lo que refuerza la validez del enfoque. En particular, en el análisis del pulmón, las variaciones en la distancia fueron más estables, sin cambios bruscos, lo que sugiere un patrón de transformación más homogéneo. En contraste, en la analogía con los racimos de uvas se observó una mayor dispersión en las variaciones de distancia semana a semana, reflejando una dinámica más irregular. No obstante, esto no invalida el modelo, sino que resalta la necesidad de ajustes para optimizar su sensibilidad y reducir la alta influencia de irregularidades, como se mencionó en el capítulo correspondiente. Aparte, se requiere una evaluación médica para determinar la aplicabilidad clínica de estos hallazgos. De momento se especula que dada una repentina alza de la distancia de Hausdorff después de un periodo relativamente estable, podría ser un indicativo de algún problema o de un avance significativo del daño.

Con esto se tienen muchas proyecciones, una de ellas es a otros órganos con una forma similar para poder estudiar el cambio morfológico. Por ejemplo se mencionó la estructura del cerebro, como la corteza, o el hígado para estudiar el cambio por cirrosis. Esto fue mencionado en reuniones con médico, por lo que, se podría realizar en un futuro.

Por otro lado gracias a la segmentación de imágenes que se puede realizar reduciendo la distancia de Hausdorff, puede ayudar a la lectura de imágenes y poder llegar a utilizar también la dimensión de Hausdorff como otro método de estudio de rugosidad.

En el caso de diagramas de Voronoi, su uso en este estudio permitió analizar la reorganización estructural del tejido pulmonar ante la destrucción de las paredes alveolares. A medida que se producían rupturas, los alvéolos vecinos se redistribuían para ocupar el espacio vacío, lo que evidenció patrones específicos de reubicación. Este comportamiento es clave para comprender cómo el pulmón responde al daño y cómo la estructura alveolar intenta compensar las pérdidas.

Además, los diagramas de Voronoi proporcionaron una representación cuantificable de la reorganización espacial, lo que podría ser útil en la caracterización de patologías pulmonares. A través de las pruebas realizadas, se observó cómo el mecanismo de destrucción de las paredes alveolares no solo afectaba a los alvéolos dañados, sino que inducía una reubicación de los vecinos, lo que alteraba la distribución original del tejido pulmonar. Este proceso de redistribución de los alvéolos vecinos fue fundamental para entender cómo la estructura pulmonar intenta compensar las pérdidas generadas por el colapso alveolar, manteniendo una cierta estabilidad en la distribución espacial a pesar del daño progresivo. Esto tiene potencial para ser aplicado a casos más grandes y complejos, donde se pueden analizar no solo la redistribución de alvéolos, sino también el comportamiento ante el quiebre simultáneo de paredes alveolares, lo que podría simular situaciones más extremas o condiciones patológicas severas. El análisis de estos fenómenos, combinado con otras herramientas matemáticas, permitirá una comprensión más profunda de la dinámica estructural y su respuesta ante diversos estímulos.

Este enfoque no solo ofrece un marco para analizar el comportamiento del pulmón ante el daño, sino que también puede servir para desarrollar modelos predictivos sobre la evolución de este daño y cómo el tejido responde a distintas condiciones, lo que puede ser relevante en el estudio de enfermedades pulmonares crónicas.

Los resultados obtenidos en este estudio abren múltiples temas de investigación y proyecciones futuras. Con las herramientas empleadas, como la distancia de Hausdorff y los diagramas de Voronoi, se ha logrado establecer una base para estudiar y poder llegar a predecir la evolución del daño en los tejidos pulmonares. Esto podría extenderse a otras áreas, como la medición de la velocidad de cambio morfológico, inclusión de otras variables a considerar, entre otros; lo que permitiría anticipar la progresión de enfermedades pulmonares y optimizar el tratamiento clínico.

Además, las técnicas desarrolladas para la segmentación de imágenes mediante la distancia de Hausdorff pueden ser aplicadas en una variedad de contextos, no solo en el ámbito pulmonar, sino en otros órganos con estructuras complejas. A través de la mejora de la precisión en la segmentación, se podrían explorar nuevas aplicaciones, como la detección temprana de patologías, la evaluación de tratamientos o estado de avance de la enfermedad.

Con todo esto, se abren nuevas fronteras para el estudio de la morfología y la patología de órganos, brindando herramientas poderosas para la medicina de precisión y la mejora en el diagnóstico y tratamiento de diversas enfermedades.

Los resultados obtenidos permiten comprender mejor los patrones de deterioro en la arquitectura pulmonar, aportando una perspectiva cuantitativa que complementa los estudios médicos tradicionales.

Apéndice A

Anexo

Código para Segmentación y Cálculo de la Distancia de Hausdorff

Listing A.1: Código en MATLAB.

```
Image1 = imread("Imagen 1.jpg");
samObj1 = segmentAnythingModel;

embeddings1 = extractEmbeddings(samObj1, Image1);
fig1 = figure;
hAX1 = axes(fig1);
hlm1 = imshow(Image1, Parent=hAX1);

roi1 = drawrectangle(hAX1);
mask1 = segmentObjectsFromEmbeddings(samObj1, embeddings1, size(Image1),
    BoundingBox=roi1.Position);

displayMask(hlm1, Image1, mask1);
addlistener(roi1, "ROIMoved", @(src, evt) segmentObjectInROI(evt, samObj1,
    embeddings1, Image1, hlm1));

Image2 = imread("Imagen 2.jpg");
samObj2 = segmentAnythingModel;

embeddings2 = extractEmbeddings(samObj2, Image2);
fig2 = figure;
hAX2 = axes(fig2);
hlm2 = imshow(Image2, Parent=hAX2);

roi2 = drawrectangle(hAX2);
mask2 = segmentObjectsFromEmbeddings(samObj2, embeddings2, size(Image2),
    BoundingBox=roi2.Position);

displayMask(hlm2, Image2, mask2);
addlistener(roi2, "ROIMoved", @(src, evt) segmentObjectInROI(evt, samObj2,
    embeddings2, Image2, hlm2));
```

```
mask1_bin = logical(mask1);  
mask2_bin = logical(mask2);  
  
distHausdorff = hausdorffDist(mask1_bin, mask2_bin);  
  
disp([ 'La distancia de Hausdorff entre las dos uvas es: ',  
      num2str(distHausdorff)]);
```

Bibliografía

- [1] Francisco Arancibia, Paulette Andino, Ruvistay Gutiérrez-arias, Camilo Parraguez, Felipe Astorga, and Alicia De la fuente. Tendencias en la mortalidad por neumonía en adultos en Chile, 2000-2016. *Revista chilena de enfermedades respiratorias*, Vol. 38(3), 2022. 14
- [2] Franz Aurenhammer, Rolf Klein, and Der Tsai Lee. *Voronoi diagrams and delaunay triangulations*. World Scientific, 2013. 18, 21, 36
- [3] Respiratory block. Functional organization of the respiratory system. 27
- [4] Constanza Bustamante, Natalia Salvador, Jerusalén Manque, Mariel Pardo, Valeria Vergara, Francisco Catalán, Abraham Torres, Sofía Cisternas, Patricia Sánchez, Santiago Riquelme, and Sebastián Rodríguez. Síndrome de distrés respiratorio agudo. *Pontificia Universidad Católica de Chile*, sf. 15
- [5] Organización Panamericana de la Salud. La carga de las enfermedades respiratorias crónicas en la región de las Américas, 2000-2019., 2021. 14
- [6] BRTC DistEd. Pig lungs peep and derecruitment. <https://www.youtube.com/watch?v=hVa5d9UT8Lo>, 2016. 32, 33
- [7] CK-12 Foundation. Enfermedades del sistema respiratorio. 19
- [8] Davood Karimi and Septimiu E. Salcudean. Reducing the hausdorff distance in medical image segmentation with convolutional neural networks. *IEEE*, 2019. 11, 18, 20, 26
- [9] Elon Lages Lima. Análisis real. *Instituto de Matemática y Ciencias Afines*, Volumen 1, 1997. 26
- [10] Jere Mead, Tamotsu Takishima, and David Leith. Stress distribution in lungs: a model of pulmonary elasticity. *Journal of applied physiology*, 28(5):596–608, Mayo 1970. 19, 20
- [11] Alisyn Metz. Stepwise recruitment maneuver. <https://www.youtube.com/watch?v=QCsbMMsUsZE>, 2016. 33
- [12] Ministerio de Salud de Chile. División de prevención y control de enfermedades, departamento de enfermedades transmisibles, 2023. 14
- [13] National Heart, Lung, and Blood Institute. Pruebas para las enfermedades pulmonares. <https://www.nhlbi.nih.gov/es/salud/pruebas-pulmonares>, 2022. Última consulta: 2024. 15
- [14] Atsuyuki Okabe, Barry Boots, Kokichi Sugihara, and Sung Nok Chiu. *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. Wiley Series in Probability and Statistics, 1999. 21, 38, 39

- [15] Organización Mundial de la Salud. Enfermedad pulmonar obstructiva crónica (epoc). [https://www.who.int/es/news-room/fact-sheets/detail/chronic-obstructive-pulmonary-disease-\(copd\)](https://www.who.int/es/news-room/fact-sheets/detail/chronic-obstructive-pulmonary-disease-(copd)), 2024. Última consulta: 2024. 14
- [16] Frank R. Schmidt and Yuri Boykov. Hausdorff distance constraint for multi-surface segmentation. *European Conference on Computer Vision (ECCV)*, 2012. 18
- [17] Cyrus Shahabi and Mehdi Sharifzadeh. Voronoi diagrams. *Encyclopedia of Database Systems*, 2018. 37
- [18] Alejandro Luengo T. and Claudia Carvajal F. Atelectasias intraoperatorias, mecanismos de formación y estrategias de prevención. *Revista Chilena De Anestesia*, 42(2):167–179, 2013. 14
- [19] Benjamín Villa, Benjamín Erranz, Pablo Cruces, Jaime Retamal, and Daniel E. Hurtado. Mechanical and morphological characterization of the emphysematous lung tissue. *Elsevier*, 2024. 18, 21, 37
- [20] Wikipedia. Distancia de hausdorff. 25